现代数学丛书

陆启铿 著

典型流形与典型域

新篇

THE NEW RESULTS OF THE CLASSICAL MANIFOLDS AND THE CLASSICAL DOMAINS

LU QIKENG

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

典型流形与典型域

新篇

陆启铿 著

上海科学技术出版社

责任编辑　赵序明

·现代数学丛书·
典型流形与典型域
新　篇
陆启铿　著
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所经销　常熟市第六印刷厂印刷
开本 787×1092　小 16 开　印张 24　插页 4　字数 312,000
1997 年 5 月第 1 版　1997 年 5 月第 1 次印刷
印数　1—1,200
ISBN 7-5323-3916-5/O·198
定价：44.00 元

出 版 说 明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价. 原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念. 由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作. 充实编委会的力量. 考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员. 编委会负责推荐(或审定)选题和作者，主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》,我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导,并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

序

自 1963 年拙著《典型流形与典型域》出版之后，30 年来发生了巨大变化．由于众所周知的客观原因，1966 年以后，多复变数函数论方面的研究工作停顿了十多年，这个领域的专家学者，包括华罗庚教授的学生和他的学生的学生全部转了行．改革开放之后，研究多复变数函数论的队伍不但复苏，而且更加壮大，研究范围也更加宽广而深入．作者认为，现在到了有必要把作者在典型流形与典型域方面自 1963 年到 1994 年的工作做一个总结的时候了，此书称为新篇，因为内容上与旧书《典型流形与典型域》没有重复之处，但经常引用旧书的符号与结果．

本书中所反映的 1991 年以后发表的及尚未发表的研究工作，得到国家自然科学基金委员会重点项目《多复变数全纯映照理论》及中国科学院重点项目《现代数学物理的若干问题》的支持．在此谨表示衷心谢意．

作者感谢汕头大学提供给我一个安静与优美的环境，使得作者能够全力写作 5 个月，得以完成此书．另外，感谢张芳小姐把书稿用计算机打印出来，孙晓东先生帮助部分校对工作．

陆启铿

1994 年 12 月于汕头大学

目　　录

CONTENTS

第 1 章

旗 流 形

在《典型流形与典型域》专著[38]中(以后简称《典》著),我们是从 Grassmann 流形开始讨论正文的,现在在这新篇中则从 r-旗流形开始. r-旗流形是 Grassmann 流形的推广,1-旗流形就是 Grassmann 流形. 按《典》著中的定义,r-旗流形也是典型流形(从下文便可以知道),不同之处是 1-旗流形是对称空间,$r>1$ 时,r-旗流形不是对称空间.

$r(>1)$旗流形的表达比 Grassmann 流形复杂得多. 我们之所以不厌其烦来讨论它们,首先是由于现在流行的数学物理中,r-旗流形起着重要作用,其次是《典》著中的方法可应用于旗流形.

§1.1 r-旗流形

在《典》著中讨论的 Grassmann 流形是复的 Grassmann 流形,虽然那里所用的方法同样适用于实的 Grassmann 流形. 这里讨论的旗流形也是复的旗流形,虽然所用的方法亦适用于实的旗流形.

在《典》著的 §1.1 之末提到,Grassmann 流形 $\mathfrak{P}(m;n)$ 即 C^{m+n} 中过原点的所有 n 维平面,亦即 C^{m+n} 中所有 n 维线性子空间. 现在假定 L_1 是 C^{m+n} 中的一个 $N-m_1$ 维线性子空间($N=m+n$),L_2 是 L_1 的 $N-m_1-m_2$ 维线性子空间,. . . ,L_r 是 L_{r-1} 的 $N-m_1-\cdots-m_r$ 维线性子空间,即有

$$C^N \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_r,$$

则$(L_1,L_2,\cdots,L_r)$叫做 C^N 的一个 r-旗. 当 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 是固定的正整数,所有 r-旗所成的空间叫 r-旗空间,以 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$

表示之，其中

$$m_{r+1} = N - m = n, \quad m = m_1 + \cdots + m_r. \qquad (1.1.1)$$

现在以《典》著中的方法描述 r-旗流形. 令

$$z = (z_1, \cdots, z_N) \in \mathrm{C}^N$$

是一行向量，z' 表示 z 的转置. L_1 是 C^N 的子空间，即是过 C^N 原点的一个 $N-m_1$ 维平面，亦即 C^N 中的 z 点适合一组 m_1 个线性方程：

$$\mathfrak{A}_1 z' = 0, \qquad (1.1.2)$$

其中 $\mathfrak{A}_1$ 是 $m_1 \times N$ 常数矩阵，其秩为 m_1. L_2 是 $N-m_1$ 维线性空间 L_1 的子空间，即是 C^N 中的 z 点，除了适合上面的线性方程之外，还要适合 m_2 个线性方程

$$\mathfrak{A}_2 z' = 0, \qquad (1.1.3)$$

其中 $\mathfrak{A}_2$ 是 $m_2 \times N$ 常数矩阵，使得 $(m_1+m_2) \times N$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \end{pmatrix}$$

的秩为 m_1+m_2. 如此继续，L_r 作为 L_{r-1} 的线性子空间，即 C^N 中的 z 点适合方程

$$\mathfrak{A}_1 z' = 0, \ \mathfrak{A}_2 z' = 0, \ \cdots, \ \mathfrak{A}_r z' = 0 \qquad (1.1.4)$$

所成的平面，其中 $\mathfrak{A}_r$ 是 $m_r \times N$ 常数矩阵，使得

$$\mathfrak{A} = \underset{N}{\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{pmatrix}} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \qquad (1.1.5)$$

的秩为 $m = m_1 + \cdots + m_r$. 因此，一旗 $(L_1, L_2, \cdots, L_r)$ 可以用一个 $m \times N$ 秩为 m 的矩阵 $\mathfrak{A}$ 代表. 但是，若令 $m \times m$ 非异方阵

$$Q = \begin{matrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \cdots & Q_{rr} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} m_1 & \quad m_2 & \quad \cdots & \quad m_r \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix}, \qquad (1.1.6)$$

则由于

$$Q\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} Q_{11}\mathfrak{A}_1 \\ Q_{21}\mathfrak{A}_1 + Q_{22}\mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ Q_{r1}\mathfrak{A}_1 + Q_{r2}\mathfrak{A}_2 + \cdots + Q_{rr}\mathfrak{A}_r \end{pmatrix},$$

可知 $L_1, L_2, \cdots, L_r$ 分别由下面各式定义：

$$L_1: \quad Q_{11}\mathfrak{A}_1 z' = 0,$$

$$L_2: \quad \begin{pmatrix} Q_{11}\mathfrak{A}_1 \\ Q_{21}\mathfrak{A}_1 + Q_{22}\mathfrak{A}_2 \end{pmatrix} z' = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$L_r: \quad Q\mathfrak{A} z' = 0,$$

即 $Q\mathfrak{A}$ 代表同一旗 $(L_1, L_2, \cdots, L_r)$.

反之，若有两个秩为 m 的 $m\times N$ 矩阵 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 代表同一的 $\mathfrak{F}(m_1, \cdots, m_{r+1})$ 的旗 $(L_1, \cdots, L_r)$，则必有(1.1.6)形式的非异方阵 Q 使得

$$\mathfrak{B} = Q\mathfrak{A}.$$

实际上，当 $r=1$ 时已知上面的断言为真. 假定 $(r-1)$-旗时为真，现考虑 r-旗情形：

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 + \cdots + m_{r-1} \\ m_r \end{matrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{B}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 + \cdots + m_{r-1} \\ m_r \end{matrix}.$$

由于 $\mathfrak{A}_1$ 与 $\mathfrak{B}_1$ 代表同一个 $(r-1)$-旗 $(L_1, \cdots, L_{r-1})$，根据归纳法假设，存在非异方阵

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r-1,1} & Q_{r-1,2} & \cdots & Q_{r-1,r-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{r-1} \end{matrix},$$
$$\qquad\qquad m_1 \qquad\quad m_2 \qquad \cdots \qquad m_{r-1}$$

使得

$$\mathfrak{B}_1 = Q_1\mathfrak{A}_1.$$

存在 $N\times N$ 非异方阵 $\mathfrak{P}$ 使得

$$\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{A}_{11}, 0)\mathfrak{P},$$

其中 $\mathfrak{A}_{11}$ 是 $(m-m_r)$ 阶非异方阵，于是

$$\mathfrak{A}z' = \begin{pmatrix} (\mathfrak{A}_{11}, 0) \\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}^{-1} \end{pmatrix} \mathfrak{P}z' = 0 \tag{1.1.7}$$

与

$$\mathfrak{B}z' = \begin{pmatrix} (Q_1\mathfrak{A}_{11}, 0) \\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{P}^{-1} \end{pmatrix} \mathfrak{P}z' = 0 \tag{1.1.8}$$

代表同一 L_r 平面. 令

$$w' = \mathfrak{P}z',$$

$$w = (w_{(1)}, w_{(2)}),$$

其中

$$w_{(1)} = (w_1, \cdots, w_{m-m_r}), \quad w_{(2)} = (w_{m-m_r+1}, \cdots, w_N).$$

并记

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}^{-1} = \underset{m-m_r \quad m_r+m_{r+1}}{(\mathfrak{A}_{21},\ \mathfrak{A}_{22})} \quad m_r \quad ,$$

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{P}^{-1} = \underset{m-m_r \quad m_r+m_{r+1}}{(\mathfrak{B}_{21},\ \mathfrak{B}'_{22})} \quad m_r \quad .$$

于是方程(1.1.7)与(1.1.8)分别化为

$$w'_{(1)} = 0, \ \mathfrak{A}_{22}w'_{(2)} = 0$$

与

$$w'_{(1)} = 0, \ \mathfrak{B}'_{22}w'_{(2)} = 0.$$

这是代表同一平面，因此有非异的 $m_r \times m_r$ 方阵 Q_2 使

$$\mathfrak{B}_{22} = Q_2\mathfrak{A}_{22}.$$

由此知

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \begin{pmatrix} Q_1\mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & Q_2\mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{P} \\
&= \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ Q_2^{-1}\mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{P} \\
&= \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\mathfrak{A}_{21} - Q_2^{-1}\mathfrak{B}_{21})\mathfrak{A}_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{P}
\end{aligned}$$

$$= Q\mathfrak{A},$$

其中 Q 为(1.1.6)的形式.这证明了断言.

综上所述,旗空间 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 可以如下定义:令 $E(m;n)$ 为所有 $m\times(m+n)$ 秩为 m 的矩阵所成的空间,

$$m + n = N. \tag{1.1.9}$$

令 $\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$ 为(1.1.6)的形式的非异方阵所成的群. $E(m;n)$ 中两个矩阵 $\mathfrak{Z}_1$ 与 $\mathfrak{Z}_2$ 称为等价,即

$$\mathfrak{Z}_1 \sim \mathfrak{Z}_2,$$

当且仅当有一 $Q\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$ 使得

$$\mathfrak{Z}_2 = Q\mathfrak{Z}_1.$$

按此等价关系把 $E(m;n)$ 的矩阵分为等价类,每一等价类一一对应一个 r-旗,故等价类所成的空间即是旗空间 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$, $m_{r+1}=n$, $m_1+\cdots+m_r=m$. 如 $\mathfrak{Z}\in E(m;n)$,以 $[\mathfrak{Z}]$ 表示 $\mathfrak{Z}$ 所属的等价类,即 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 的一点或一旗. 当 $r=1$ 时, $\mathfrak{F}(m_1,m_2)=\mathfrak{P}(m;n)$ 是 Grassmann 流形.

§1.2　旗空间的复结构

我们有自然的投影

$$\pi : E(m;n) \to \mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1}).$$

如 $[\mathfrak{Z}]\in\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$,则 $\pi^{-1}([\mathfrak{Z}])$ 是 $E(m;n)$ 中的点集

$$\{Q\mathfrak{Z}\}_{Q\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r)}.$$

我们可定义 $\mathfrak{F}$ 的开集,如果它的原像集合是开的,这样引进的 $\mathfrak{F}$ 拓扑是 Hausdorff 拓扑. 因为如 $[\mathfrak{Z}]\neq[\mathfrak{W}]$,则

$$Q_1\mathfrak{Z} \neq Q_2\mathfrak{W},\ \forall\ Q_1、Q_2 \in \Gamma(m_1,\cdots,m_r).$$

在《典》著中证明 Grassmann 空间 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是 Haussdorff 空间的过程中,已证明了有分别包含 $\{Q\mathfrak{Z}\}_{Q\in\Gamma(m)}$ 与 $\{Q\mathfrak{W}\}_{Q\in\Gamma(m)}$ 两集合的开集,它们对 $\mathfrak{P}(m;n)$ 的投影集合是两个非空的互不相交的开集. 此两个开集在 π 的投影下,必然是互不相交的,因为 $\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$

是 $\Gamma(m)$ 的子群. 现在引进 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 的坐标邻域. $E(m;n)$ 中的点

$$\mathfrak{A} = \underset{N}{\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{pmatrix}} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \tag{1.2.1}$$

称为属于点集 $M(\alpha^1,\cdots,\alpha^r)$，其中每一个 α^j 是一组整数，$\alpha^j=(\alpha_1^j,\cdots,a_{m_j}^j)$，适合

$$1 \leqslant \alpha_1^j < \cdots < \alpha_{m_j}^j \leqslant N \quad (j=1,\cdots,r). \tag{1.2.2}$$

所有 $\alpha_k^j(k=1,\cdots,m_j;j=1,\cdots,r)$ 共有 $m_1+\cdots+m_r=m$ 个，是整数 $1,\cdots,N$ 中取 m 个，但一定要符合条件(1.2.2). 子矩阵 $\mathfrak{A}_j$ 的第 $\alpha_1^j,\cdots,\alpha_{m_1}^j$ 列所成的 $m_j\times m_j$ 子方阵要求是非异的. 于是有 $N\times N$ 排列方阵 $P(\alpha^1)$ 使得

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} Q_{11}(I,Z_1) \\ \mathfrak{A}_2P^{\dagger}\ (\alpha^1) \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_rP^{\dagger}\ (\alpha^1) \end{pmatrix} P(\alpha^1),$$

其中 Q_{11} 是 $m_1\times m_1$ 非异方阵，$P^{\dagger}=\overline{P}'$. 注意排列方阵 P 通常是指一非异方阵，其每一行的元素只有一个是 1，其他为 0. 但是 $\det P$ 可能是 -1. 在这里的排列方阵是要求其行列式必须为正，即当 P 的行列式为 1 时，就取之为 P. 如 P 的行列式为 -1 时，把 P 以 $e^{\pi i/N}P$ 代替，后者是酉方阵. 我们以 P^+ 表示矩阵 P 的复共轭及转置.

取 $m\times m$ 方阵

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \in \Gamma(m_1,\cdots,m_r),$$

使得

$$Q_1^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} I & Z_1 \\ 0 & \mathfrak{A}_2(2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \mathfrak{A}_r(2) \end{pmatrix} P(\alpha^1).$$

此时 $\mathfrak{A}_2(2)$ 的第 $\alpha_1^2,\cdots,\alpha_{m_2}^2$ 列所成 $m_2\times m_2$ 方阵要求其是非异的，因此存在 $(N-m_1)\times(N-m_1)$ 排列方阵 $P_2(\alpha^2)$ 使得

$$\mathfrak{A}_2(2) = Q_{22}(I,Z_2)P_2(\alpha^2)^{\dagger},$$

其中 Q_{22} 为 $m_2\times m_2$ 非异方阵. 取 $m\times m$ 方阵

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & * & I \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3+\cdots+m_r \end{matrix} \in \Gamma(m_1,\cdots,m_r),$$

使得

$$Q_2^{-1}Q_1^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} I & Z_1P_2(\alpha^2)^{\dagger} \\ 0 & (I,Z_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & (0,\mathfrak{A}_r(3)) \end{pmatrix} P(\alpha^2)P(\alpha^1),$$

其中
$$P(\alpha^2) = \begin{pmatrix} I^{(m_1)} & 0 \\ 0 & P_2(\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

如此继续，最终有 $m\times m$ 方阵

$$Q = Q_1\cdots Q_r \in \Gamma(m_1,\cdots,m_r)$$

及
$$P(\alpha) = P(\alpha^r)\cdots P(\alpha^1),$$

其中 $\alpha=(\alpha^1,\cdots,\alpha^r)$，使得

$$\mathfrak{A} = QZP(\alpha),$$

其中

$$Z = \begin{pmatrix} I & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1,r+1} \\ 0 & I & Z_{23} & \cdots & Z_{2r} & Z_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & Z_{r,r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} . \quad (1.2.3)$$
$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_r & m_{r+1} \end{matrix}$$

令

$$\mathfrak{B}(\alpha) = \pi(M(\alpha)), \quad \alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^r). \tag{1.2.4}$$

这是 $\mathfrak{F}(m_1, \cdots, m_{r+1})$ 的局部坐标邻域，Z 的 $m_j \times m_k$ 子矩阵 $Z_{jk}(1 \leqslant j < k \leqslant r+1)$ 的元素是 $\pi(\mathfrak{A}) = [\mathfrak{A}]$ 点的局部坐标，这些元素共有

$$M = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant r-1} m_j m_k. \tag{1.2.5}$$

即 $\mathfrak{B}(\alpha)$ 与 C^M 同胚.

显然，任一 $\mathfrak{A} \in E(m;n)$ 必属于某一 $M(\alpha)$，因而 $[\mathfrak{A}] \in \mathfrak{B}(\alpha)$，故坐标邻域的集合 $\{\mathfrak{B}(\alpha)\}$，$\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^r)$，$\alpha^j = (\alpha^j_1, \cdots, \alpha^j_{m_j})$ 适合条件(1.2.2)，是把 $\mathfrak{F}(m_1, \cdots, m_{r+1})$ 盖过. 这里共有

$$\frac{(m_1 + \cdots + m_{r+1})!}{m_1!(m_2 + \cdots + m_{r+1})!} \cdot \frac{(m_2 + \cdots + m_{r+1})!}{m_2!(m_3 + \cdots + m_{r+1})!} \cdots \times \frac{(m_r + m_{r+1})!}{m_r! m_{r+1}!} = \frac{N!}{m_1! m_2! \cdots m_r! m_{r+1}!} \tag{1.2.6}$$

个坐标邻域.

如果 $[\mathfrak{A}]$ 同时属于 $M(\beta)$，则可记

$$\mathfrak{A} = RWP(\beta),$$

其中 $R \in \Gamma(m_1, \cdots, m_r)$，

$$W = \begin{pmatrix} I & W_{12} & \cdots & W_{1r} & W_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & W_{2r} & W_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & W_{r,r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \tag{1.2.7}$$
$$\quad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_r \quad m_{r+1}$$

则由(1.2.3)知

$$W = R^{-1} Q Z P(\alpha) P(\beta)^{-1}. \tag{1.2.8}$$

我们要证明 $W_{jk}(j<k)$ 的元素是 Z_{jk} 的元素的全纯函数，当 $\pi(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{B}(\alpha) \cap \mathfrak{B}(\beta)$. 于是 $\mathfrak{F}(m_1, \cdots, m_{r+1})$ 是 M 维复流形. 我们可以更一般的证明以下定理：

定理 1.2.1　对任一$\mathfrak{T}\in SL(N,C)$，$E(m;n)$中的线性变换

$$\mathfrak{W}=A\mathfrak{Z}\mathfrak{T},\ A\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r) \tag{1.2.9}$$

诱导出$\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$的一个全纯自同构$\tau_{\mathfrak{T}}$，与$A$无关，并且[$\mathfrak{W}$]的局部坐标是[$\mathfrak{Z}$]的局部坐标的有理函数.

证　由于$\pi(A\mathfrak{Z}\mathfrak{T})=\pi(\mathfrak{Z}\mathfrak{T})$，故由(1.2.9)诱导出的自同构$\tau_{\mathfrak{T}}:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$与$A$无关.设

$$\mathfrak{Z}=QZP(\alpha),\ \mathfrak{W}=RWP(\beta),$$

则由(1.2.9)知

$$\begin{aligned} W &= R^{-1}AQZP(\alpha)\mathfrak{T}P^{-1}(\beta) \\ &= KZ\mathfrak{T}_1, \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

其中

$$K=R^{-1}AQ=\begin{pmatrix} K_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{r1} & K_{r2} & \cdots & K_{rr} \end{pmatrix} \tag{1.2.11}$$
$$\qquad\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_{r+1}$$

属于$\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$，而

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= P(\alpha)\mathfrak{T}P^{-1}(\beta) \\ &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1,r+1} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{r+1,1} & T_{r+1,2} & \cdots & T_{r+1,r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{r+1} \end{matrix}. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$
$$\qquad\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_{r+1}$$

记

$$K=(K_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant r},\ Z=(Z_{jk})_{1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant k\leqslant r+1},$$
$$W=(W_{jk})_{1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant k\leqslant r+1},$$

其中K_{jk}、Z_{jk}、W_{jk}皆为子矩阵，适合

$$K_{jk}=0,\qquad 当\ j<k;$$
$$Z_{jk}=0,\qquad 当\ j>k,\quad Z_{jj}=I;$$
$$W_{jk}=0,\qquad 当\ j>k,\quad W_{jj}=I.$$

比较(1.2.10)两边的子矩阵,有

$$\begin{aligned} W_{jk} &= \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r+1} K_{jp} Z_{pq} T_{qk} \\ &= \sum_{p\leqslant j} K_{jp} \sum_{q\geqslant p} Z_{pq} T_{qk} \\ &= \sum_{p=1}^{j} K_{jp}\left(T_{pk} + \sum_{q=p+1}^{r+1} Z_{pq} T_{qk}\right) \quad . \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

特别是

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{j} K_{jp}\left(T_{pj} + \sum_{q=p+1}^{r+1} Z_{pq} T_{qj}\right) = I,\ j = 1,\cdots,r; \\ &\sum_{p=1}^{j} K_{jp}\left(T_{pk} + \sum_{q=p+1}^{r+1} Z_{pq} T_{qk}\right) = 0,\ \text{当 } j > k; \\ &W_{jk} = \sum_{p=1}^{j} K_{jp}\left(T_{pk} + \sum_{q=p+1}^{r+1} Z_{pq} T_{qk}\right),\ \text{当 } j < k. \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

由(1.2.14)的前两组方程可以解出 K_{jk},它们的元素是 Z_{jk}的元素的有理函数,以之代入第三组方程,便得出 W_{jk}的元素是 Z_{jk}元素的有理函数.

我们按下面的次序写出头两组方程:

$$(j,k) = (1,1),(2,1),(2,2),\cdots,(r,1),(r,2),\cdots,(r,r),$$

并为了简便,令

$$S_{pk}(Z) = T_{pk} + \sum_{q=p+1}^{r+1} Z_{pq} T_{qk}. \tag{1.2.15}$$

方程(1.2.14)的前两组即

$$\begin{aligned} &K_{11}S_{11}(Z) = I, \\ &K_{21}S_{11}(Z) + K_{22}S_{21}(Z) = 0, \\ &K_{21}S_{12}(Z) + K_{22}S_{22}(Z) = I, \\ &\qquad\vdots \\ &K_{r1}S_{11}(Z) + K_{r2}S_{21}(Z) + \cdots + K_{rr}S_{r1}(Z) = 0, \\ &K_{r1}S_{12}(Z) + K_{r2}S_{22}(Z) + \cdots + K_{rr}S_{r2}(Z) = 0, \\ &\qquad\vdots \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

$$K_{r1}S_{1r}(Z)+K_{r2}S_{2r}(Z)+\cdots+K_{rr}S_{rr}(Z)=I.$$

由第一组方程知 K_{11} 与 $S_{11}(Z)$ 皆非异，并且得出

$$K_{11}=[S_{11}(Z)]^{-1}. \tag{1.2.17}$$

我们首先证明一个引理：

引理 1.2.2 设方阵

$$\underset{\quad r \qquad s}{\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}}$$

中 A 是非异的.

(i)若有矩阵

$$\underset{r \quad s}{(X,Y)}\ \ s$$

适合

$$(X,Y)\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}=(0,I),$$

则 $D-BA^{-1}C$ 必非异；

(ii)A 与 $D-BA^{-1}C$ 非异，则 $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ 非异，并且 $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} \begin{matrix} A^{-1}+A^{-1}C \\ \times(D-BA^{-1}C)^{-1}BA^{-1} \end{matrix} & -A^{-1}C(D-BA^{-1}C)^{-1} \\ -(D-BA^{-1}C)^{-1}BA^{-1} & (D-BA^{-1}C)^{-1} \end{pmatrix}.$$

实际上，由(i)的矩阵方程

$$XA+YB=0,\ XC+YD=I$$

中的 第一组解出 $X=-YBA^{-1}$，代入第二组，得

$$Y(D-BA^{-1}C)=I.$$

故 $D-BA^{-1}C$ 必非异.

根据(ii)的假设

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & A^{-1}C \\ 0 & D-BA^{-1}C \end{pmatrix},$$

等号右端方阵是非异的，故

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}C \\ 0 & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C(D - BA^{-1}C)^{-1} \\ 0 & (D - BA^{-1}C)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -BA^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

此即(ii).

现在应用此引理来证明方程(1.2.16)的解的递推公式.

令

$$K_j = (K_{j+1,1}, \cdots, K_{j+1,j}),$$
$$B_j = (S_{j+1,1}, \cdots, S_{j+1,j}),$$
$$C_j = \begin{pmatrix} S_{1,j+1} \\ \vdots \\ S_{j,j+1} \end{pmatrix}, \quad D_j = S_{j+1,j+1}, \tag{1.2.18}$$
$$A_{j+1} = \begin{pmatrix} A_j & C_j \\ B_j & D_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \cdots, r-1,$$
$$A_1 = S_{11},$$

则方程(1.2.16)除第一组已有解(1.2.17)外，其他方程可记为

$$(K_j, K_{j+1,j+1}) \begin{pmatrix} A_j & C_j \\ B_j & D_j \end{pmatrix} = (0, I),$$
$$j = 1, \cdots, r-1. \tag{1.2.19}$$

当用递归计算时，根据引理 1.2.2(i)知 $D_j - B_j A_j^{-1} C_j$ 是非异的，根据此引理(ii)知 A_{j+1} 是非异的，因而有

$$(K_j, K_{j+1,j+1}) = (0, I) \begin{pmatrix} A_j & C_j \\ B_j & D_j \end{pmatrix}^{-1},$$

并且得出

$$K_j = (K_{j+1,1}, \cdots, K_{j+1,j}) = -(D_j - B_j A_j^{-1} C_j)^{-1} B_j A_j^{-1},$$
$$K_{j+1,j+1} = (D_j - B_j A_j^{-1} C_j)^{-1}, \; j = 1, \cdots, r-1. \tag{1.2.20}$$

由于 $S_{jk}(Z)$ 的元素是 Z_{jk} 的元素的多项式，根据定义，A_j、B_j、C_j、D_j 的元素是 Z_{jk} 元素的多项式，因此 A_j^{-1}，$(D_j-B_jA_j^{-1}C_j)^{-1}$ 的元素是 Z_{jk} 的元素的有理函数，故 K_{jk} 的元素是 Z_{jk} 的元素的有理函数，由(1.2.14)的第三组方程知，W_{jk} 的元素是 Z_{jk} 的元素的有理函数. 于是证明了定理 1.2.1. ▌

特别是当在(1.2.12)式中取 $\mathfrak{T}=I$，于是局部坐标变换(1.2.8)是有理变换，这当然是全纯的.

定理 1.2.3　r-旗空间 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 是 M 维复流形，

$$M=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant r+1}m_jm_k.$$

这里在 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 中引进的局部坐标邻域 $\mathfrak{V}(\alpha)$，$\alpha=(\alpha^1,\cdots,\alpha^r)$，$\alpha^j=(\alpha_1^j,\cdots,\alpha_{m_j}^j)$，称为此 r-旗流形的标准坐标邻域，而 $\mathfrak{V}(\alpha)$ 中的局部坐标，即 $Z_{jk}(1\leqslant j<k\leqslant r+1)$ 的元素为标准局部坐标. 在下一节中我们将证明 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 在 $SL(N,C)$ 诱导的全纯自同构群 $\{\tau_{\mathfrak{T}}\}_{\mathfrak{T}\in SL(N,C)}$ 下是齐性的(可递的)，因此我们讨论 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 的某些几何性质时，往往只在一个特殊的坐标邻域中作讨论已足够了. 我们通常取之为

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_0=\mathfrak{V}((1,\cdots,m_1),(m_1+1,\cdots,m_1+m_2),\\ \cdots,(m_1+\cdots+m_{r-1}+1,\cdots,m)).\end{aligned}\qquad(1.2.21)$$

而在此邻域中，包含一个特殊的点

$$[\mathfrak{A}_0],\ \mathfrak{A}_0=(I^{(m)},0),\qquad(1.2.22)$$

此点在 $\mathfrak{V}_0$ 中的局部坐标为

$$Z_{jk}=0\quad(r\leqslant j<k\leqslant r+1).\qquad(1.2.23)$$

注意，此时由(1.2.3)定义的 $Z\neq0$，而是 $Z=\mathfrak{A}_0$.

定理 1.2.1 的证明是构造性的. 我们把变换的局部坐标表达式总结出来，以便于应用.

定理 1.2.4　对 $\mathfrak{T}\in SL(N,C)$ 诱导出 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 的全纯自同构 $\tau_{\mathfrak{T}}$，如果把 $\mathfrak{V}(\alpha)$ 的局部坐标为 $Z_{jk}(j<k)$ 的点映为 $\mathfrak{V}(\beta)$ 的局部坐标为 $W_{jk}(j<k)$ 的点，则它们之间有如下的关系：

$$W_{jk}=\sum_{p=1}^{j}K_{jp}(Z)(T_{pk}+\sum_{q=p+1}^{r+1}Z_{pq}T_{qk}),$$

$$1 \leqslant j < k \leqslant r+1,$$

其中

$$P(\alpha)\mathfrak{T}P(\beta)^{\dagger} = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1,r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{r+1,1} & \cdots & T_{r+1,r+1} \end{pmatrix},$$

$$K_{11} = [S_{11}(Z)]^{-1},$$

$$(K_{j+1,1},\cdots,K_{j+1,j},K_{j+1,j+1})$$
$$= (D_j - B_jA_j^{-1}C_j)^{-1}(-B_jA_j^{-1},I),$$

$$A_1 = S_{11}(Z),\ A_{j+1} = \begin{pmatrix} A_j & C_j \\ B_j & D_j \end{pmatrix},$$

$$D_j = S_{j+1,j+1}(Z),\ B_j = (S_{j+1,1}(Z),\cdots,S_{j+1,j}(Z)),$$

$$C_j = \begin{pmatrix} S_{1,j+1}(Z) \\ \vdots \\ S_{j,j+1}(Z) \end{pmatrix}, j = 1,\cdots,r,$$

$$S_{jk}(Z) = T_{jk} + \sum_{q=p+1}^{r+1} Z_{pq}T_{qk},\ (j、k = 1,\cdots,r).$$

在这里的子矩阵 M_{jk} 通常是隐含了它是 $m_j \times m_k$ 矩阵.

此外,要注意,$SL(N,C)$ 中可能有不同的方阵 $\mathfrak{T}$ 与 $\mathfrak{T}$ 诱导出 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 相同的自同构.

例如

$$\mathfrak{T}_k = e^{\frac{2\pi ki}{N}}\mathfrak{T},\ k = 1,\cdots,N-1$$

诱导出 $\mathfrak{F}$ 相同的自同构,但当 $\mathfrak{T}$ 在 I 的充分小的邻域时,则可以证明,不同的 $\mathfrak{T}$ 诱导出 $\mathfrak{T}$ 的不同自同构.

§1.3 旗流形是齐性复流形

我们要证明 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 在 $SL(N,C)$ 诱导的自同构下是可递的,只须证明它在酉子群 $SU(N)$ 诱导的自同构下是可递的便足够了,即要证明任一点 $[\mathfrak{A}]$,其中

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{r,r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \in E(m;n)$$
$$\qquad\qquad\quad m_1 \qquad\quad m_{r+1}$$

存在一酉方阵 $\mathfrak{U} \in SU(N)$ 使得

$$\mathfrak{A}\mathfrak{U} = Q(I,0),\ Q \in \Gamma(m_1,\cdots,m_r). \tag{1.3.1}$$

实际上,存在酉方阵 $\mathfrak{U}_1 \in SU(N)$ 使

$$\mathfrak{A}\mathfrak{U}_1 = \begin{pmatrix} A_{11}(2) & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21}(2) & A_{22}(2) & \cdots & A_{2,r+1}(2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{r1}(2) & A_{r2}(2) & \cdots & A_{r,r+1}(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}(2) & 0 \\ \begin{pmatrix} A_{21}(2) \\ \vdots \\ A_{r1}(2) \end{pmatrix} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}(3) & \cdots & A_{2,r+1}(3) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & A_{r2}(3) & \cdots & A_{r,r+1}(3) \end{pmatrix}.$$

同样存在酉方阵 $\mathfrak{V}_2 \in SU(N-m_1)$ 使

$$\begin{pmatrix} A_{22}(3) & \cdots & A_{2,r+1}(3) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r2}(3) & \cdots & A_{r,r+1}(3) \end{pmatrix} \mathfrak{V}_2$$

$$= \begin{pmatrix} A_{22}(4) & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}(4) \end{pmatrix},$$

其中 $\mathfrak{A}(4)$ 为 $(m-m_1-m_2)\times(N-m_1-m_2)$ 矩阵.

于是

$$\mathfrak{A}\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \begin{pmatrix} A_{11}(3) & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}(4) & 0 \\ 0 & * & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}(4) \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathfrak{U}_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathfrak{V}_2 \end{pmatrix}.$$

如此继续,最终得出(1.3.1)式.

其次,我们考虑 $SU(N)$中的方阵 $\mathfrak{U}$,使得 $\tau_{\mathfrak{U}}$ 把点$[(I,0)]$固定不变,即

$$(I,0)\mathfrak{U} = Q(I,0),\ Q \in \Gamma(m_1,\cdots,m_r). \qquad (1.3.2)$$

由此知必须

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ B & U_{r+1} \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{U}$ 是酉方阵,必须 $B=0$,U_{r+1}是 $m_{r+1}\times m_{r+1}$ 酉方阵,Q 也是酉方阵.但 $Q\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$,必须

$$Q = \begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_r \end{pmatrix},$$

其中 $U_1,\cdots,U_r$ 分别是 $m_1\times m_1,\cdots,m_r\times m_r$ 酉方阵,因此有

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} U_1 & & & \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{r+1} \end{pmatrix},\quad \det U_1\cdots\det U_{r+1} = 1. \qquad (1.3.3)$$

反之,若 $\mathfrak{U}$ 适合上面的条件,$\tau_{\mathfrak{U}}$ 必定使$[(I,0)]$不变,因此 $SU(N)$的迷向子群(即固定分群)为

$$S(U(m_1)\times\cdots\times U(m_{r+1})). \qquad (1.3.4)$$

定理 1.3.1 旗流形 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$在 $SU(N)\left(N=\sum_{j=1}^{r+1}m_j\right)$诱导的变换下是可递的,其迷向子群为 $S(U(m_1)\times U(m_2)\times\cdots\times U(m_{r+1}))$.

由齐性空间的理论可得如下定理:

定理 1.3.2 在实解析意义下:

$$\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1}) \cong SU(N)/S(U(m_1)\times\cdots\times U(m_{r+1})),$$

并且 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$是紧致的.

当 $\mathfrak{U}$ 为(1.3.3)的形式时,它所诱导的变换 $\tau_{\mathfrak{U}}$ 在 $\mathfrak{B}_0$ 到 $\mathfrak{B}_0$ 的

局部坐标表示为

$$W = QZ\mathfrak{U}, \tag{1.3.5}$$

其中 Q、Z、W 分别为(1.1.6)、(1.2.3)、(1.2.7)的形式. 比较两端的子矩阵可知

$$Q_{jk} = 0, j \neq k;\ Q_{jj} = U_j^{-1}.$$

因此迷向子群诱导的变换由 $\mathfrak{V}_0$ 到 $\mathfrak{V}_0$ 的局部坐标表示为

$$W_{jk} = U_j^{-1} Z_{jk} U_k,\ 1 \leqslant j < k \leqslant r+1. \tag{1.3.6}$$

在此坐标邻域 $\mathfrak{V}_0$ 中,$[(I,0)]$点的局部坐标为 $Z_{jk}=0$.

定理 1.3.3　在 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$的 $P_0=[(I,0)]$点的固定分群 $I_0(\mathfrak{F})=S(U(m_1)\times\cdots\times U(m_{r+1}))$所诱导的自同构在 $\mathfrak{V}_0$ 的局部表示为 $W_{jk}=U_j^{-1}Z_{jk}U_k$, $U_j\in U(m_j)$.

对任一 $\mathfrak{U}\in SU(N)$诱导的自同构 $\tau_{\mathfrak{U}}:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ 必把某一点$[\mathfrak{A}]$映为$[\mathfrak{A}_0]$点. 设

$$\mathfrak{A} = AP(\alpha),\ A = \begin{pmatrix} I & A_{12} & \cdots & A_{1r} & A_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & A_{2r} & A_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & A_{r,r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix}.$$
$$\qquad\qquad\qquad m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_r \quad m_{r+1}$$

现在要把$[\mathfrak{A}]$所在的邻域 $\mathfrak{V}(\alpha)$到$[\mathfrak{A}_0]$所在的邻域 $\mathfrak{V}_0$ 的 $\tau_{\mathfrak{U}}$ 的局部坐标表示表达出来.

根据(1.2.10),$\tau_{\mathfrak{U}}$ 的局部坐标表示为:

$$W = Q(Z)Z\mathfrak{U}_1,\ \mathfrak{U}_1 = P(\alpha)\mathfrak{U} \in SU(N),$$
$$Q(Z) \in \Gamma(m_1,\cdots,m_k), \tag{1.3.7}$$

其中 Z 的子矩阵 Z_{jk}(的元素)是 $\mathfrak{V}(\alpha)$的局部坐标,W 的子矩阵 W_{jk}(的元素)($1\leqslant j<k\leqslant r+1$)是 $\mathfrak{V}_0$ 的局部坐标. 根据假设

$$(I,0) = Q(A)A\mathfrak{U}_1, \tag{1.3.8}$$

我们的目标是找出适合上面条件的 $\mathfrak{U}_1$ 的明显表达式,亦即求出 W_{jk}与 Z_{jk}之间的明显表达式. 这对于研究流形 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$的几何与分析的性质是至关重要的,这在《典》著中可以看到.

我们先证明一些引理. 如 H 是正定 Hermite 方阵,我们将以

$H^{\frac{1}{2}}$表示唯一的正定 Hermite 方阵适合 $H^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}=H$.

引理 1.3.4 设 B 是 $s_1\times s_2$ 矩阵,存在 s_1+s_2 阶幺模酉方阵 $\mathfrak{U}$ 及 $s_1\times s_1$ 非异方阵 P 使得

$$\underset{s_1\quad s_2}{(I,0)}{}_{s_1} = P(I,B)\mathfrak{U}$$

的必要与充分的条件为

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} I & -B \\ B^{\dagger} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H^{-\frac{1}{2}}U_1 & 0 \\ 0 & K^{-\frac{1}{2}}U_2 \end{pmatrix}, P = U_1^{-1}H^{-\frac{1}{2}},$$

其中 U_1 与 U_2 为任意的 s_1 阶与 s_2 阶酉方阵,适合 $\det U_1\det U_2=1$,

$$H = I + BB^{\dagger}, K = I + B^{\dagger}B.$$

证 由直接验算可知,条件是充分的.反之,如有幺模酉方阵 $\mathfrak{U}_1$ 适合条件

$$(I,0) = P_1(I,B)\mathfrak{U}_1,$$

其中 P_1 非异,则有

$$(I,0) = P_1P^{-1}(I,0)\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}_1.$$

$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}_1$ 仍然是幺模酉方阵,故必须

$$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}_1 = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}, \ P_1P^{-1}V_1 = I,$$

其中 V_1 与 V_2 分别是 s_1 与 s_2 阶酉方阵,适合 $\det V_1\det V_2=1$,因而

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}, \ P_1 = V_1^{-1}P.$$

引理证毕. ▌

引理 1.3.5 设有变换

$$\underset{s_1\quad s_2}{(I,S)}{}_{s_1} = Q(T)(I,T)\mathfrak{U},$$

其中 $Q(T)$为非异的,$\mathfrak{U}$ 为 s_1+s_2 阶常数酉方阵,适合

$$(I,0) = Q(B)(I,B)\mathfrak{U},$$

则此变换当 T 在 B 的邻域中能记为

$$S = U_1^{-1}H^{\frac{1}{2}}(I + TB^{\dagger})^{-1}(T - B)K^{-\frac{1}{2}}U_2,$$

其中 U_1 与 U_2 分别为 s_1 与 s_2 阶酉方阵,

$$H = I + BB^{\dagger}\,,\quad K = I + B^{\dagger}B.$$

实际上，根据引理 1.3.4，$\mathfrak{U}$ 的形式已知，代入便得.

引理 1.3.6　设矩阵 B_{12}、B_{13}、B_{23}分别为 $s_1\times s_2$、$s_1\times s_3$、$s_2\times s_3$ 矩阵. 存在幺模$(s_1+s_2+s_3)$-阶酉方阵 V 及非异方阵

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} & \end{array}$$

使得

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} & \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B_{12} & B_{13} \\ 0 & I & B_{23} \end{pmatrix} V$$

的必要与充分的条件为

$$V = \begin{pmatrix} I & -B_{12} & -B_{13} \\ B_{12}^{\dagger} & I & 0 \\ B_{13}^{\dagger} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^{-\frac{1}{2}}V_1 & 0 \\ 0 & K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_2 \end{pmatrix},$$

$$K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_2 = \begin{pmatrix} I - B_{12}^{\dagger}H_1^{-1}(B_{12},B_{13})(I,B_{23})^{\dagger} & -B_{23} \\ B_{23}^{\dagger} - B_{13}^{\dagger}H_1^{-1}(B_{12},B_{13})(I,B_{23})^{\dagger} & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} H_2^{-\frac{1}{2}}V_2 & 0 \\ 0 & K_2^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathfrak{V}_2$ 是(s_2+s_3)-阶酉方阵，

$$P_{11} = V_1^{-1}H_1^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_{21} = -P_{22}(B_{12}^{\dagger} + B_{23}B_{13}^{\dagger})H_1^{-1},\quad P_{22} = V_2^{-1}H_2^{-\frac{1}{2}},$$

其中 V_1、V_2、$\mathfrak{V}_3$ 分别为 s_1、s_2、s_3 阶酉方阵，

$$H_1 = I + (B_{12},B_{13})(B_{12},B_{13})^{\dagger}\,,$$

$$K_1 = I + (B_{12},B_{13})^{\dagger}(B_{12},B_{13}),$$

$$H_2 = (I,B_{23})K_1^{-1}(I,B_{23})^{\dagger}\,,$$

$$K_2 = I + \begin{pmatrix} B_{13} - B_{12}B_{23} \\ B_{23} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} B_{13} - B_{12}B_{23} \\ B_{23} \end{pmatrix}.$$

此外 $\det V_1 \det V_2 \det \mathfrak{V}_3 = 1$.

证 可以直接验算条件是充分的.

由于引理的假设包含了

$$(I,0) = P_{11}(I,B_{12},B_{13})V, \quad P_{11} = V_1^{-1}H_1^{-\frac{1}{2}},$$

根据引理 1.3.4,必须

$$V = \begin{pmatrix} H_1^{-\frac{1}{2}}V_1 & -B_1K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_2 \\ B_1^{\dagger} H_1^{-\frac{1}{2}}V_1 & K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (B_{12},B_{13}). \tag{1.3.9}$$

另一方面,引理的假设亦可记为

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} (I,B_2)V,$$

其中
$$B_2 = \begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{13} - B_{12}B_{23} \\ B_{23} \end{pmatrix}.$$

根据引理 1.3.4 知,必须

$$V = \begin{pmatrix} (I + B_2B_2^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_1 & -B_2(I + B_2^{\dagger} B_2)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_3 \\ B_2^{\dagger} (I + B_2B_2^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_1 & (I + B_2^{\dagger} B_2)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \mathfrak{V}_1^{-1}(I + B_2B_2^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.3.10}$$

其中 $\mathfrak{V}_1$、$\mathfrak{V}_3$ 分别为 s_1+s_2 与 s_3 阶酉方阵.

记
$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix} .$$
$$\qquad\qquad s_1 \qquad s_2 \qquad s_3$$

由(1.3.9)与(1.3.10)知道

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^{-\frac{1}{2}} V_1 \\ B_{12}^\dagger H_1^{-\frac{1}{2}} V_1 \\ B_{13}^\dagger H_1^{-\frac{1}{2}} V_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(B_{12} - B_{12}B_{23})K_2^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_3 \\ -B_{23}K_2^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_3 \\ K_2^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_3 \end{pmatrix}.$$

在引理的假设的式子两端从左乘以 $V^\dagger$，有

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^\dagger & V_{21}^\dagger & V_{31}^\dagger \\ V_{12}^\dagger & V_{22}^\dagger & V_{32}^\dagger \\ V_{13}^\dagger & V_{23}^\dagger & V_{33}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{11}B_{12} & P_{11}B_{13} \\ P_{21} & P_{21}B_{12} + P_{22} & P_{21}B_{13} + P_{22}B_{23} \end{pmatrix}.$$

比较上式第二行子矩阵，得出

$$\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{21}^\dagger P_{22}^\dagger \\ (I + B_{12}^\dagger R_{21}^\dagger) P_{22}^\dagger \\ (B_{23}^\dagger + B_{13}^\dagger R_{21}^\dagger) P_{22}^\dagger \end{pmatrix},$$

其中

$$R_{21} = P_{22}^{-1} P_{21}.$$

另一方面，假设的式子亦可记为

$$\begin{pmatrix} P_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ -P_{22}^{-1}P_{21}P_{11}^{-1} & P_{22}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B_{12} & B_{13} \\ 0 & I & B_{23} \end{pmatrix} V$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & * \\ V_{21} + B_{23}V_{31} & V_{22} + B_{23}V_{32} & * \end{pmatrix}.$$

把已得出来的 V_{jk} 值代入上式，并比较第二行第一、二列子矩阵，有

$$R_{21} = -(B_{12}^\dagger + B_{23}B_{13}^\dagger)H_1^{-1} = -(I, B_{23})(B_{12}, B_{13})^\dagger H_1^{-1},$$

$$P_{22}^{-1} = (I - B_{12}^\dagger R_{21}^\dagger)P_{22}^\dagger + B_{23}(B_{23}^\dagger + B_{13}^\dagger R_{21}^\dagger)P_{22}^\dagger,$$

即

$$I = P_{22}[I + B_{23}B_{23}^\dagger - (B_{12}^\dagger + B_{23}B_{13}^\dagger)$$

$$\times H_1^{-1}(B_{12}^\dagger + B_{23}B_{13}^\dagger)^\dagger]P_{22}^\dagger$$
$$= P_{22}(I,B_{23})(I - B_1^\dagger H_1^{-1}B_1)(I,B_{23})^\dagger P_{22}^\dagger$$
$$= P_{22}(I,B_{23})K_1^{-1}(I,B_{23})^\dagger P_{22}^\dagger,$$

故有 s_2 阶酉方阵 V_2 使

$$P_{22} = V_2^{-1}H_2^{-\frac{1}{2}}, \quad H_2 = (I,B_{23})K_1^{-1}(I,B_{23})^\dagger .$$

以 R_{21}、P_{22}的值代入，得

$$\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^\dagger H_2^{-\frac{1}{2}}V_2 \\ [I - B_{12}^\dagger H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^\dagger]H_2^{-\frac{1}{2}}V_2 \\ [B_{23}^\dagger - B_{13}^\dagger H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^\dagger]H_2^{-\frac{1}{2}}V_2 \end{pmatrix}.$$

由(1.3.9)可知

$$K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_2 = \begin{pmatrix} V_{22} & V_{23} \\ V_{32} & V_{33} \end{pmatrix}.$$

由于 V_{22}、V_{23}、V_{32}、V_{33}的值已知，以它们代入 $K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_2$ 的右端，便得到引理. ▎

引理 1.3.7 若有变换

$$\begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & \\ & \begin{pmatrix} I & S_{12} & S_{13} \\ 0 & I & S_{23} \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q_{11}(T) & 0 \\ Q_{21}(T) & Q_{22}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T_{12} & T_{13} \\ 0 & I & T_{23} \end{pmatrix} V,$$

其中 $Q_{11}(T)$、$Q_{22}(T)$分别是 s_1 与 s_2 阶非异方阵，V 是 $s_1+s_2+s_3$ 阶常数酉方阵，适合

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q_{11}(B) & 0 \\ Q_{21}(B) & Q_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B_{12} & B_{13} \\ 0 & I & B_{23} \end{pmatrix} V,$$

则此变换当 T 在 B 的邻域中可表为

$$S_1 = (S_{12},S_{13}) = V_1^{-1}H_1^{\frac{1}{2}}(I + T_1B_1^\dagger)^{-1}(T_1 - B_1)K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_2,$$

$$T_1 = (T_{12}, T_{13}), B_1 = (B_{12}, B_{13}),$$

$$S_{23} = Q_{22}(T)\{T_{23} - B_{23} + R_{21}(T)[T_{13} - B_{13} - (T_{12} - B_{12})B_{23}]\}K_2^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_3,$$

其中

$$R_{21}(T) = -(B_{12}^{\dagger} + T_{23}B_{13}^{\dagger})(I + T_{12}B_{12}^{\dagger} + T_{13}B_{13}^{\dagger})^{-1},$$

$$\begin{aligned} Q_{22}(T) = V_2^{-1}H_2^{\frac{1}{2}}\{&I - B_{12}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I, B_{23})^{\dagger} \\ &+ T_{23}[B_{23}^{\dagger} - B_{13}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I, B_{23})^{\dagger}] \\ &+ R_{21}(T)(T_1 - B_1)(I - (I, B_{23})B_1^{\dagger}H_1^{-1}B_{12}, \\ B_{23} - (I, B_{23})B_1^{\dagger}H_1^{-1}B_{13})^{\dagger}\}^{-1}, \end{aligned}$$

这里 V_1、V_2、$V_3 = \mathfrak{V}_3$ 分别是 s_1、s_2、s_3 阶酉方阵，而 H_1、K_1、H_2、K_2 的定义如引理 1.3.6 所述.

证　由于假设包含了

$$(I, S_1) = Q_{11}(T)(I, T_1)V,$$

适合

$$(I, 0) = Q_{11}(B_1)(I, B_1)V,$$

根据引理 1.3.5 便得出 S_1 的表达式.

应用引理 1.3.6 得知 V 的形式，比较变换的第二行子矩阵，有

$$\begin{aligned} (0, I, S_{23}) &= (Q_{21}, Q_{22} + Q_{21}T_{12}, Q_{22}T_{23} + Q_{21}T_{13})V \\ &= \Big([Q_{21} + (Q_{22} + Q_{21}T_{12})B_{12}^{\dagger} \\ &\qquad + (Q_{22}T_{23} + Q_{21}T_{13})B_{13}^{\dagger}]H_1^{-\frac{1}{2}}V_1, \\ &\qquad [Q_{22} + Q_{21}(T_{12} - B_{12}), \\ &\qquad Q_{22}T_{23} + Q_{21}(T_{13} - B_{13})]K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_2\Big). \end{aligned}$$

引理 1.3.6 中 $K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_2$ 的形式已经知道，令

$$R_{21} = Q_{22}^{-1}Q_{21},$$

$$(0, I, S_{23}) = \Big(Q_{22}[B_{12}^{\dagger} + T_{23}B_{13}^{\dagger}$$

$$+ R_{21}(I + T_{12}B_{12}^{\dagger} + T_{13}B_{13}^{\dagger})]H_1^{-\frac{1}{2}}V_1,$$

$$Q_{22}\{[I + R_{21}(T_{12} - B_{12})]$$

$$\times [I - B_{12}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}]$$

$$+ [T_{23} + R_{21}(T_{13} - B_{13})]$$

$$\times [B_{23}^{\dagger} - B_{13}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}]\}H_2^{-\frac{1}{2}}V_2,$$

$$Q_{22}\{T_{23} - B_{23} - R_{21}[(T_{12} - B_{12})B_{23}$$

$$- (B_{13} - T_{13})]\}K_2^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_3\Big).$$

由此知，当 T 在 B 的充分小邻域中，比较子矩阵，有

$$R_{21} = -(B_{12}^{\dagger} + T_{23}B_{13}^{\dagger})(I + T_{12}B_{12}^{\dagger} + T_{13}B_{13}^{\dagger})^{-1}$$

$$Q_{22} = V_2^{-1}H_2^{\frac{1}{2}}\{I - B_{12}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}$$

$$+ T_{23}[B_{23}^{\dagger} - B_{13}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}]$$

$$+ R_{21}(T_{12} - B_{12})[I - B_{12}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}]$$

$$+ R_{21}(T_{13} - B_{13})[B_{23}^{\dagger} - B_{13}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger})]\}^{-1},$$

$$S_{23} = Q_{22}\{T_{23} - B_{23} - R_{21}[(T_{12} - B_{12})B_{23}$$

$$- (T_{13} - B_{13})]\}K_2^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_3.$$

特别是

$$Q_{22}(B) = V_2^{-1}H_2^{\frac{1}{2}}\{I - B_{12}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}$$

$$+ B_{23}B_{23}^{\dagger} - B_{23}B_{13}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}\}^{-1}$$

$$= V_2^{-1}H_1^{\frac{1}{2}}\{(I,B_{23})[I - B_1^{\dagger}H_1^{-1}B_1](I,B_{23})^{\dagger}\}^{-1}$$

$$= V_2^{-1}H_2^{\frac{1}{2}}\{(I,B_{23})K_1^{-1}(I,B_{23})^{\dagger}\}^{-1}$$

$$= V_2^{-1}H_2^{-\frac{1}{2}}.$$

这是非异的，故 T 在 B 的充分小邻域中 $Q_{22}(T)$ 是非异的. 引理证毕. ▌

为了把适合条件(1.3.8)的 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 的全纯自同构(1.3.7)的局部坐标明显表达出来，我们需引进一些符号.

令

$$Q_j = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{j1} & Q_{j2} & \cdots & Q_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{j-1} & 0 \\ R_{j,j-1} & Q_{jj} \end{pmatrix}, \quad (1.3.11)$$

$$R_{j,j-1} = (Q_{j1}, \cdots, Q_{j,j-1}), \quad j = 1, \cdots, r.$$

又令

$$\mathfrak{Z}_j = \begin{pmatrix} I & Z_{12} & \cdots & Z_{1j} & Z_{1,j+1} & \cdots & Z_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & Z_{2j} & Z_{2,j+1} & \cdots & Z_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & Z_{j,j+1} & \cdots & Z_{j,r+1} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{W}_j = \begin{pmatrix} I & W_{12} & \cdots & W_{1j} & W_{1,j+1} & \cdots & W_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & W_{2j} & W_{2,j+1} & \cdots & W_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & W_{j,j+1} & \cdots & W_{j,r+1} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}_j = \begin{pmatrix} I & A_{12} & \cdots & A_{1j} & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & A_{2j} & A_{2,j+1} & \cdots & A_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & A_{j,j+1} & \cdots & A_{j,r+1} \end{pmatrix},$$

$$(1.3.12)$$

$$Z_j = (Z_{j,j+1}, \cdots, Z_{j,r+1}),$$
$$W_j = (W_{j,j+1}, \cdots, W_{j,r+1}),$$
$$A_j = (A_{j,j+1}, \cdots, A_{j,r+1}), \quad (1.3.13)$$

$$\mathfrak{Z}_{jj} = \begin{pmatrix} I & Z_{12} & \cdots & Z_{1j} \\ 0 & I & \cdots & Z_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_j \end{matrix},$$

$$\mathfrak{Z}_{j,j+1} = \begin{pmatrix} Z_{1,j+1} \\ Z_{2,j+1} \\ \vdots \\ Z_{j,j+1} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{Z}_{j,r+1} = \begin{pmatrix} Z_{1,j+2} & \cdots & Z_{1,r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{j,j+2} & \cdots & Z_{j,r+1} \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{W}_{j,j}$、$\mathfrak{W}_{j,j+1}$、$\mathfrak{W}_{j,r+1}$及$\mathfrak{A}_{j,j}$、$\mathfrak{A}_{j,j+1}$、$\mathfrak{A}_{j,r+1}$($j=1,\cdots,r$)也有相应的定义. (1.3.14)

定理 1.3.8 设$\mathfrak{U}_r \in SU(N)$，若变换

$$\mathfrak{W}_r = Q_r(Z)\mathfrak{Z}_r\mathfrak{U}_r$$

适合条件

$$(I,0) = Q_r(A)\mathfrak{A}_r\mathfrak{U}_r,$$

则此变换当Z在A的邻域中可记为

$$W_j = Q_{jj}(Z)\left\{Z_j - A_j - \widetilde{R}_{j,j-1}(Z)[F_{j-1}(Z) - F_{j-1}(A)]\begin{pmatrix} -A_j \\ I \end{pmatrix}\right\}K_j^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+1},$$

其中$\mathfrak{U}_{j+1}$是酉方阵，

$$\widetilde{R}_{j,j-1}(Z) = -(I,Z_j)F_{j-1}(A)^\dagger[I + F_{j-1}(Z)F_{j-1}(A)^\dagger]^{-1},$$

$$\begin{aligned} Q_{jj}(Z) = U_j^{-1}H_j^{\frac{1}{2}}\{&I - F_{j-1,1}(A)^\dagger R_{j-1}^{-1}F_{j-1}(A)(I,A_j)^\dagger \\ &+ Z_j[A_j^\dagger - F_{j-1,2}(A)^\dagger R_{j-1}^{-1}F_{j-1}(A)^\dagger(I,A_j)^\dagger] \\ &+ \widetilde{R}_{j,j-1}(Z)[F_{j-1}(Z) - F_{j-1}(A)] \\ &\times(I - (I,A_j)F_{j-1}(A)^\dagger R_{j-1}^{-1}F_{j-1,1}(A), \\ &A_j - (I,A_j)F_{j-1}(A)^\dagger R_{j-1}^{-1}F_{j-1,2}(A)^\dagger)^\dagger\}^{-1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &H_j = (I,A_j)K_{j-1}^{-1}(I,A_j)^\dagger, \\ &K_0 = I,\ K_j = I + F_j(A)^\dagger F_j(A), \\ &R_j = I + F_j(A)F_j(A)^\dagger. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &F_0(Z) = 0,\ F_j(Z) = (F_{j1}(Z),F_{j2}(Z)), \\ &F_{j1}(Z) = \mathfrak{Z}_{jj}^{-1}\mathfrak{Z}_{j,j+1},\ F_{j2}(Z) = \mathfrak{Z}_{jj}^{-1}\mathfrak{Z}_{j,r+1}, \end{aligned}$$

$$K_j^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+1}=\begin{pmatrix} I-F_{j1}(A)^\dagger R_j^{-1}F_j(A)(I,A_{j+1})^\dagger & -A_{j+1} \\ A_{j+1}^\dagger-F_{j2}(A)^\dagger R_j^{-1}F_j(A)(I,A_{j+1})^\dagger & I \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} H_{j+1}^{-\frac{1}{2}}U_{j+1} & 0 \\ 0 & K_{j+1}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+2} \end{pmatrix},\ j=1,\cdots,r.$$

这里 $U_1,\cdots,U_r,U_{r+1}=\mathfrak{U}_{r+1}$ 是任意的 $m_1,\cdots,m_r,m_{r+1}$ 阶酉方阵，$\det U_1\cdots\det U_{r+1}=1$.

证　当 $r=1$ 时,则变换只有

$$W_1=U_1^{-1}H_1(A)^{\frac{1}{2}}(I+Z_1A_1)^{-1}(Z_1-A_1)K_1(A)^{-\frac{1}{2}}U_2.$$

当 $r>1$ 时,定理的假设包含了

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{W}_{jj} & \mathfrak{W}_{j,j+1} & \mathfrak{W}_{j,r+1} \\ 0 & I & W_{j+1} \end{pmatrix}=Q_{j+1}(Z)\begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_{jj} & \mathfrak{Z}_{j,j+1} & \mathfrak{Z}_{j,r+1} \\ 0 & I & Z_{j+1} \end{pmatrix}\mathfrak{U}_r,\tag{1.3.15}$$

适合条件

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}=Q_{j+1}(A)\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{jj} & \mathfrak{A}_{j,j+1} & \mathfrak{A}_{j,r+1} \\ 0 & I & A_{j+1} \end{pmatrix}\mathfrak{U}_r.\tag{1.3.16}$$

假定 $W_1,\cdots,W_j$ 已知其为 Z 的函数,则以上两式可以分别写为

$$\begin{pmatrix} I & F_{j1}(W) & F_{j2}(W) \\ 0 & I & W_{j+1} \end{pmatrix}=\widetilde{Q}_{j+1}(Z)\begin{pmatrix} I & F_{j1}(Z) & F_{j2}(Z) \\ 0 & I & Z_{j+1} \end{pmatrix}\mathfrak{U}_r,\tag{1.3.17}$$

其中

$$\widetilde{Q}_{j+1}=\begin{pmatrix} \mathfrak{W}_{jj}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}Q_{j+1}\begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_{jj} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \widetilde{Q}_j(Z) & 0 \\ R_{j+1,j} & Q_{j+1,j+1} \end{pmatrix},\tag{1.3.18}$$

及

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}=\widetilde{Q}_{j+1}(A)\begin{pmatrix} I & F_{j1}(A) & F_{j2}(A) \\ 0 & I & A_{j+1} \end{pmatrix}\mathfrak{U}_r.\tag{1.3.19}$$

应用引理 1.3.6 知必须

$$\mathfrak{U}_r=\begin{pmatrix} I & -F_j(A) \\ F_j(A)^\dagger & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_j^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_j & 0 \\ 0 & K_j^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+1} \end{pmatrix},\tag{1.3.20}$$

其中$\mathfrak{V}_j$与$\mathfrak{U}_{j+1}$分别是$m_1+\cdots+m_j$阶与$m_{j+1}+\cdots+m_{r+1}$阶酉方阵，

$$R_j = I + F_j(A)F_j(A)^\dagger, \quad K_j = I + F_j(A)^\dagger F_j(A), \tag{1.3.21}$$

并且

$$K_j^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+1} = \begin{pmatrix} I - F_{j1}(A)^\dagger R_j^{-1}F_j(A)(I,A_{j+1})^\dagger & -A_{j+1} \\ A_{j+1}^\dagger - F_{j2}(A)^\dagger R_j^{-1}F_j(A)(I,A_{j+1})^\dagger & I \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} H_{j+1}^{-\frac{1}{2}}U_{j+1} & 0 \\ 0 & K_{j+1}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+2} \end{pmatrix}, \tag{1.3.22}$$

其中

$$H_{j+1} = (I,A_{j+1})K_j^{-1}(I,A_{j+1})^\dagger. \tag{1.3.23}$$

应用引理 1.3.7,便得到定理. ▌

比较(1.3.17)两端第一行,并应用引理 1.3.5,得到以下定理：

定理 1.3.9 在定理 1.3.8 的条件下,变换可写为

$$F_j(W) = \mathfrak{V}_j^{-1}R_j^{\frac{1}{2}}[I + F_j(Z)F_j(A)^\dagger]^{-1}$$
$$\times [F_j(Z) - F_j(A)]K_{j+1}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+1}, \quad j = 1,\cdots,r.$$

注意,这里的酉方阵$\mathfrak{V}_j$与$\mathfrak{U}_{j+1}$不能是任意的,它们依赖于A.

把$\mathfrak{U}\in SU(N)$所诱导的自同构$r_{\mathfrak{U}}:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$在$\mathfrak{V}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r)$到$\mathfrak{V}(\beta^1,\cdots,\beta^r)$的局部坐标表示为定理 1.3.9 的形式,更接近于《典》著中所用的形式,例如见《典》著中的(1.3.11). 现在研究此定理中$F_j(Z)$的几何意义. 令

$$T_j = (\underset{m_{j+1}}{T_{j,j+1}},\cdots,\underset{m_{r+1}}{T_{j,r+1}})m_1+\cdots+m_j \tag{1.3.24}$$

为$p_j\times q_j$矩阵,

$$p_j = m_1 + \cdots + m_j, \quad q_j = m_{j+1} + \cdots + m_{r+1},$$
$$p_j + q_j = N, \quad j = 1,\cdots,r. \tag{1.3.25}$$

定理 1.3.10 若有

$$F_j(A) = F_j(B),$$

其中$A=\{A_1,\cdots,A_r\}$, $B=\{B_1,\cdots,B_r\}$,A_j与B_j皆是$p_j\times q_j$矩阵,则必须

$$A = B.$$

故

$$T_j = F_j(Z),\quad j = 1,\cdots,r$$

是全纯安装

$$\iota: \mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1}) \to \mathfrak{F}(p_1,q_1)\times\cdots\times\mathfrak{F}(p_r,q_r)$$

的局部坐标表示.

证　由于

$$A_1 = F_1(A) = F_1(B) = B_1,$$

若已证

$$F_1(A) = F_1(B),\cdots,F_{j-1}(A) = F_{j-1}(B),$$

必有

$$A_1 = B_1,\cdots,A_{j-1} = B_{j-1},$$

则由

$$\begin{aligned} F_j(A) &= \mathfrak{A}_{jj}^{-1}(\mathfrak{A}_{j,j+1},\mathfrak{A}_{j,r+1}) \\ &= \begin{pmatrix} I & A_{12} & \cdots & A_{1j} \\ 0 & I & \cdots & A_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,r+1} \\ A_{2,j+1} & \cdots & A_{2,r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j,j+1} & \cdots & A_{j,r+1} \end{pmatrix} \\ &= F_j(B) \\ &= \begin{pmatrix} I & B_{12} & \cdots & B_{1j} \\ 0 & I & \cdots & B_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{1,j+1} & \cdots & B_{1,r+1} \\ B_{2,j+1} & \cdots & B_{2,r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{j,j+1} & \cdots & B_{j,r+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据假设,已知 $A_1=B_1,\cdots,A_{j-1}=B_{j-1}$,故有

$$\begin{pmatrix} I & B_{12} & \cdots & B_{1j} \\ 0 & I & \cdots & B_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A_{12} & \cdots & A_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & A_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}.$$

由此推知

$$A_j = (A_{j,j+1}, \cdots A_{j,r+1})$$
$$= (B_{j,j+1}, \cdots B_{j,r-1}) = B_j.$$

这证明了定理的第一部分.

当 Z 是在邻域 $\mathfrak{V}(\alpha^1\cdots,\alpha^r)$ 的坐标，$T_1=F_1(Z)$ 是 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(p_1,q_1)$ 的坐标邻域 $\mathfrak{V}(\alpha^1)$ 的局部坐标，$T_2=F_2(Z)$ 是在 $\mathfrak{F}(p_2,q_2)$ 的邻域 $\mathfrak{V}(\alpha^1,\alpha^2)$ 的局部坐标，…，$T_r=F_r(p_r,q_r)$ 是在 $\mathfrak{F}(p_r,q_r)$ 中 $\mathfrak{V}(\alpha^1,\cdots,\alpha^r)$ 的局部坐标，故由 $T_j=F_j(Z)(j=1,\cdots,r)$ 定义了安装

$$\iota: \mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1}) \to \mathfrak{F}(p_1,q_1) \times \cdots \times \mathfrak{F}(p_r,q_r).$$

这是一全纯的安装. 定理证毕. ▌

令

$$\mathfrak{M}(m_1,\cdots,m_{r+1}) = \iota(\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})), \qquad (1.3.26)$$

这乃是 $\mathfrak{F}(p_1,q_1)\times\cdots\times\mathfrak{F}(p_r,q_r)$ 的子集. 定理 1.3.9 即是由 $\mathfrak{U}\in SU(N)$ 诱导出的自同构 $\tau_{\mathfrak{U}}$ 用 $\mathfrak{F}(p_1,q_1)\times\cdots\times\mathfrak{F}(p_r,q_r)$ 的局部坐标表示的.

§1.4 旗流形的不变微分度量

r-旗流形 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 可全纯安装于 Grassmann 流形拓扑积

$$\mathfrak{T}(m_1,\cdots,m_{r+1}) = \mathfrak{F}(p_1,q_1) \times \cdots \times \mathfrak{F}(p_r,q_r),$$

而在每一 $\mathfrak{F}(p_j,q_j)$ 有一自然的微分度量(见《典》著(3.3.2))，因此 $\mathfrak{T}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 有自然的不变微分度量

$$\mathrm{d}\sigma_\lambda^2 = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathrm{tr}[(I+T_jT_j^\dagger)^{-1}\mathrm{d}T_j(I+T_j^\dagger T_j)^{-1}\mathrm{d}T_j^\dagger]$$
$$= \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathrm{d}\sigma_j^2, \qquad (1.4.1)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是任意的正参数，由安装

$$\iota: \mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1}) \to \mathfrak{T}(m_1,\cdots,m_{r+1})$$

诱导出 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 的微分度量

$$ds_\lambda^2 = \iota^* d\sigma_\lambda^2, \tag{1.4.2}$$

此就是以 $T_j = F_j(Z)$ 代入(1.4.1)式. 由于每一个

$$d\sigma_j^2 = \mathrm{tr}[(I + T_j T_j^\dagger)^{-1} dT_j (I + T_j^\dagger T_j)^{-1} dT_j^\dagger] \tag{1.4.3}$$

是 $\mathfrak{F}(p_j, q_j)$ 的 $SU(N) = SU(p_j + q_j)$(诱导)的变换下不变,故 $d\sigma_\lambda^2$ 是在

$$SU^r(N) = SU\underbrace{(N) \times \cdots \times SU(N)}_{r\text{次}}$$

的变换下不变,即对于变换

$$(I, S_j) = P_j(I, T_j)\mathfrak{U}_j, \quad \mathfrak{U}_j \in SU(N) \quad (j = 1, \cdots, r) \tag{1.4.4}$$

来说不变;特别是当

$$\mathfrak{U}_1 = \cdots = \mathfrak{U}_r$$

时不变. 此外,对于每个 $d\sigma_j^2$ 是 Kähler 度量,因此 $d\sigma_\lambda^2$ 是 Kähler 度量,故 $\iota^* d\sigma_\lambda^2$ 也是 Kähler 度量.

定理 1.4.1　在 $\mathfrak{F}(m_1, \cdots, m_r, m_{r+1})$ 中有 $SU(N)$ 的变换下不变的 Kähler 度量

$$ds_\lambda^2 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathrm{tr}\{[I + F_j(Z)F_j(Z)^\dagger]^{-1} dF_j(Z) \times [I + F_j(Z)^\dagger F_j(Z)]^{-1} dF_j(Z)^\dagger\},$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是任意的正数.

特别取

$$Z = 0, \text{则 } F_j(0) = 0,$$

$$[dF_j(Z)]_{Z=0} = (d\mathfrak{Z}_{j,j+1}, d\mathfrak{Z}_{j,r+1}),$$

故

$$\begin{aligned} ds_\lambda^2|_{Z=0} &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathrm{tr}(d\mathfrak{Z}_{j,j+1} d\mathfrak{Z}_{j,j+1}^\dagger + d\mathfrak{Z}_{j,r+1} d\mathfrak{Z}_{j,r+1}^\dagger) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathrm{tr}\left[\sum_{p=1}^{j} \sum_{q=j+1}^{r+1} dZ_{pq} dZ_{pq}^\dagger\right] \\ &= \sum_{p \leqslant j < q} \lambda_j \mathrm{tr}(dZ_{pq} dZ_{pq}^\dagger) \end{aligned}$$

$$= \sum_{p<q}\left(\sum_{j=p}^{q-1}\lambda_j\right)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{pq}\mathrm{d}Z_{pq}^{\dagger})$$

$$= \sum_{p<q}\lambda_{pq}\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{pq}\mathrm{d}Z_{pq}^{\dagger}), \tag{1.4.5}$$

其中

$$\lambda_{pq} = \sum_{j=p}^{q-1}\lambda_j, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant r+1. \tag{1.4.6}$$

把矩阵集$\{Z_{jk}\}_{j<k}$按以下次序排列：

$$Z = \{Z_{12}, Z_{13}, \cdots, Z_{1,r+1}, Z_{23}, \cdots, Z_{2,r+1}, \cdots, Z_{r,r+1}\}, \tag{1.4.7}$$

然后按此次序把每一矩阵的元素依次排成一行：

$$z = (z^1, \cdots, z^M), \tag{1.4.8}$$

其中 Z_{jk}的元素是

$$z^{\mu(j,k)+1}, z^{\mu(j,k)+2}, \cdots, z^{\mu(j,k)+m_j m_k}, \tag{1.4.9}$$

其中

$$\mu(j,k) = \sum_{p=1}^{j-1}\sum_{q=j}^{r+1} m_p m_q + m_j m_{j+1} + \cdots + m_j m_{k-1}, \tag{1.4.10}$$

$$1 \leqslant j < k \leqslant r+1, \quad m_0 = 0.$$

于是(1.4.5)可记为

$$\mathrm{d}s_\lambda^2|_{z=0} = \sum_{p<q}\lambda_{pq}\left(\sum_{j=\mu(p,q)+1}^{\mu(p,q)+m_p m_q}|\mathrm{d}z^j|^2\right)$$

$$= \sum_{p<q}\lambda_{pq}\left(\sum_{j=1}^{m_p m_q}|\mathrm{d}z^{\mu(p,q)+j}|^2\right)$$

$$= \mathrm{d}z H_\lambda(0)\mathrm{d}z^{\dagger}, \tag{1.4.11}$$

其中

$$H_\lambda(0) = \begin{pmatrix} \lambda_{12}I^{(m_1 m_2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{13}I^{(m_1 m_3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{r,r+1}I^{(m_r m_{r+1})} \end{pmatrix}. \tag{1.4.12}$$

定理 1.4.2　在 $SU(N)$（诱导的）变换下不变的 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 的 Hermite 度量

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{M} h_{\alpha\bar{\beta}}(z)\mathrm{d}z^\alpha \overline{\mathrm{d}z^\beta} = \mathrm{d}zH(z)\mathrm{d}z^\dagger ,$$

其中

$$H(z) = (h_{\alpha\bar{\beta}}(z))_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant M},$$

其必要与充分条件为

$$H(a) = \left[\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right]_{z=a} H(0)\left[\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right]_{z=a}^\dagger,$$

其中 a 是 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 中任一点[$\mathfrak{A}$]的（标准）局部坐标，0 是 $\mathfrak{B}_0$ 中[$(I,0)$]点的局部坐标.

$$w = f(z,a)$$

是 $SU(N)$ 中（诱导的）把[$\mathfrak{A}$]点映为[$(I,0)$]点的自同构的局部坐标表示，此外，

$$H(0) = \begin{pmatrix} \nu_{12}I^{(m_1m_2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nu_{13}I^{(m_1m_3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \nu_{r,r+1}I^{(m_rm_{r+1})} \end{pmatrix},$$

其中 ν_{jk} $(1\leqslant j<k\leqslant r+1)$ 是任意的正数.

证　由于 ds^2 是不变度量，经过变换 $w=f(z,a)$，有

$$H(z) = \left[\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right]H(f(z,a))\left[\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right]^\dagger. \quad (1.4.13)$$

特别是取 $z=a$，便得出定理的 $H(a)$ 与 $H(0)$ 的关系式.

当取 $a=0$ 时，我们已知使[$(I,0)$]不变的变换为(1.3.6)的形式，因此函数方阵为

$$U = \begin{pmatrix} V_1^{-1}\cdot\times V_2 & & & \\ & V_1^{-1}\cdot\times V_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_r^{-1}\cdot\times V_{r+1} \end{pmatrix},$$

(1.4.14)

其中 $V_1,\cdots,V_{r+1}$ 分别是 $m_1,\cdots,m_{r+1}$ 任意酉方阵，适合 $\det V_1\cdots\det V_{r+1}=1$，"·×"的定义见《典》著中的附录，由此知

$$UH(0)=H(0)U.$$

根据 Schur 引理，$H(0)$ 必为定理的形式. 显然 ds^2 在 $[(I,0)]$ 的固定分群

$$S(U(m_1)\times\cdots\times U(m_{r+1}))$$

下不变，由于 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 在 $SU(N)$ 下是可递的，因此由定理定义的 $H(a)$ 是一个不变度量方阵在 a 的值. 定理证毕. ▌

为清楚起见，令 ds_ν^2 表示一个不变 Hermite 度量，它的度量方阵在 $[(I,0)]$ 点值 $H(0)$ 为定理中的形式. 因此 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 中不变的 Hermite 度量有 $\frac{r(r+1)}{2}$ 个参数那么多. 其中，根据定理 1.4.1，是 Kähler 度量的最少有 r 个参数那么多，为区别起见，令 ds_ν^2 的度量方阵为 $H_\nu(z)$，并令

$$h_\nu(z)=\det H_\nu(z),\tag{1.4.15}$$

根据定理 1.4.2

$$h_\nu(a)=c_\nu\left|\det\left[\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right]_{z=a}\right|^2,\ c_\nu=\prod_{j<k}\nu_{jk}^{m_jm_k}.$$

如 $\mu=(\mu_{12},\mu_{13},\cdots,\mu_{r,r+1})$ 是另一组正数，则由上式可知

$$h_\nu(a)=\frac{c_\nu}{c_\mu}h_\mu(a).$$

定理 1.4.3 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 中任两个不变 Hermite 度量的度量方阵的行列式(即不变体积密度)只差一个常数因子.

现在我们取定

$$H(0)=I^{(M)},$$

而令

$$ds^2=dzH(z)dz^\dagger,\ h(z)=\det H(z).\tag{1.4.16}$$

这就是华罗庚度量(见《典》著中 174 页). 于是有

$$h_\nu(z)=c_\nu h(z).\tag{1.4.17}$$

如果 ds_ν^2 是一 Kähler 度量，则其 Ricci 曲率张量为

$$R_{\alpha\bar{\beta}}=-\frac{\partial^2\log h(z)}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}.\tag{1.4.18}$$

这可以从陆启铿著《多复变数函数引论》的公式(2.5.25)见到.

定理 1.4.4　$\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$中不变 Hermite 度量 $\mathrm{d}s_\nu^2$ 的 Ricci曲率张量 $R_{\alpha\bar{\beta}}$与 $\nu=\{\nu_{jk}\}_{1\leqslant j<k\leqslant r+1}$无关.

若令

$$g_{\alpha\bar{\beta}}=-\frac{\partial^2\log h(z)}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta},\tag{1.4.19}$$

并假定它是正定的,则根据定理 1.4.2 及 1.4.3 知,度量

$$\mathrm{d}s_E^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{M}g_{\alpha\bar{\beta}}(z)\mathrm{d}z^\alpha\mathrm{d}\bar{z}^\beta\tag{1.4.20}$$

是一个 Kähler-Einstein 度量,但目前还不知道(1.4.19)中 $g_{\alpha\bar{\beta}}$所成的方阵是否正定,如果存在,便是唯一的.

定理 1.4.5　$\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$上(在相差一个正常数因子的意义下)最多存在一个不变的 Kähler-Einstein 度量.

定理 1.4.6　旗流形 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$有$\frac{1}{2}r(r+1)$个正参数的在 $SU(N)$下不变的 Hermite 度量;不变 Kähler 度量不少于 r 个参数,但存在唯一的(在相差一个正常数因子的意义下)Kähler-Einstein 不变度量.

由此定理知,当 $r>1$ 时,$\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$不是对称空间,因为不可约 Hermite 对称空间的不变 Hermite 度量只有一个参数.

定理 1.4.7　由 Grassmann 流形拓扑积 $\mathfrak{T}(m_1,\cdots,m_{r+1})$上的不变 Kähler 度量 $d\sigma_\lambda^2$ 所诱导的旗流形 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$的度量为 $\mathrm{d}s_\lambda^2$,则 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$的所有 Ricci 曲率皆相同,为正定的.

现在我们求 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$中唯一的不变 Kähler-Einstein 度量. 根据(1.4.13),取 $z=a$,有

$$h_\nu(a)=c_\nu h(a),\tag{1.4.21}$$

其中

$$h(a)=\left|\det\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right|^2_{z=a}.\tag{1.4.22}$$

我们只须把行列式计算出来. 根据定理 1.3.8,有

$$dW_j|_{Z=A}=Q_{jj}(A)\left[dA_j-\widetilde{R}_{j,j-1}(A)dF_{j-1}(A)\begin{pmatrix}-A_j\\ I\end{pmatrix}\right]$$

$$\times K_j(A)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+1}. \tag{1.4.23}$$

根据 $F_{j-1}(Z)$的定义,它只与 $Z_1,\cdots,Z_{j-1}$有关,因此

$$\left[\det\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right]_{z=a}=\prod_{j=1}^{r}\left|\det\frac{\partial W_j}{\partial Z_j}\right|^2_{z=a}$$

$$=\prod_{j=1}^{r}|\det[Q_{jj}(A)'\cdot\times K_j(A)^{-\frac{1}{2}}]|^2$$

$$=\prod_{j=1}^{r}|\det K_j(A)|^{-m_j}$$

$$\times\ |\det Q_{jj}(A)|^{2(m_{j+1}+\cdots+m_{r+1})}. \tag{1.4.24}$$

由定理 1.3.8 知

$$Q_{jj}(A)=U_j^{-1}H_j(A)^{\frac{1}{2}}\{I-F_{j-1,1}(A)^{\dagger}R_{j-1}(A)^{-1}F_{j-1}(A)(I,A_j)^{\dagger}$$

$$+A_jA_j^{\dagger}-A_jF_{j-1,2}(A)^{\dagger}R_{j-1}(A)^{-1}F_{j-1}(A)(I,A_j)^{\dagger}\}^{-1}$$

$$=U_j^{-1}H_j(A)^{\frac{1}{2}}\{(I,A_j)[I-F_{j-1}(A)^{\dagger}R_{j-1}(A)^{-1}$$

$$\times F_{j-1}(A)](I,A_j)^{\dagger}\}^{-1}$$

$$=U_j^{-1}H_j(A)^{-\frac{1}{2}},$$

故(1.4.24)为

$$h(a)=\prod_{j=1}^{r}|\det K_j(A)|^{-m_j}|\det H_j(A)|^{-(m_{j+1}+\cdots+m_{r+1})}$$

$$=\prod_{j=1}^{r}\det[I+F_j(A)F_j(A)^{\dagger}]^{-m_j}$$

$$\times\prod_{j=1}^{r}\{\det(I,A_j)[I+F_{j-1}(A)^{\dagger}F_{j-1}(A)]^{-1}$$

$$\times(I,A_j)^{\dagger}\}^{-(m_{j+1}+\cdots+m_{r+1})}. \tag{1.4.25}$$

因此若有唯一的 Kähler-Einstein 度量,应为

$$
\begin{aligned}
ds_E^2 = -\,d\bar{d}\log h(z) &= \sum_{j=1}^{r} m_j d\bar{d}\log\det[I + F_j(Z)F_j(Z)^\dagger] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}(m_{j+1} + \cdots + m_{r+1})d\bar{d}\log\det H_j(Z) \\
&= \sum_{j=1}^{r} m_j \operatorname{tr}\{[I + F_j(Z)F_j(Z)^\dagger]^{-1} dF_j \\
&\quad \times [I + F_j(z)^\dagger F_j(Z)]^{-1} dF_j(Z)^\dagger\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}(m_{j+1} + \cdots + m_{r+1})\operatorname{tr}\{H_j(Z)^{-1} d\bar{d}H_j(Z) \\
&\quad - H_j(Z)^{-1} dH_j(Z) H_j(Z)^{-1}\bar{d}H_j(Z)\}.
\end{aligned}
\tag{1.4.26}
$$

上式第一项是从 Grassmann 流形的拓扑积诱导的度量，这是在 $SU(N)$ 下不变的，ds_E^2 也是在 $SU(N)$ 下不变，因此(1.4.26)右端的第二项也是在 $SU(N)$ 下不变的.

根据定义 $H_j(0)=I$，

$$
\begin{aligned}
[dH_j(Z)]_{Z=0} &= (0, dZ_j)(I, 0)^\dagger = 0, \\
[d\bar{d}H_j(Z)]_{Z=0} &= (0, dZ_j)(0, dZ_j)^\dagger - (I, 0) \\
&\quad \times [dF_{j-1}(Z)^\dagger dF_{j-1}(Z)]_{Z=0}(I, 0)^\dagger \\
&= \sum_{k=1}^{r-j+1} dZ_{j,j+k} dZ_{j,j+k}^\dagger - \sum_{k=1}^{j-1} dZ_{kj}^\dagger dZ_{kj}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}[H_j(Z)^{-1} d\bar{d}H_j(Z) - H_j(Z)^{-1} dH_j(Z) H_j(Z) dH_j(Z)]_{Z=0} \\
&= \operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^{r-j+1} dZ_{j,j+k} dZ_{j,j+k}^\dagger - \sum_{k=1}^{j-1} dZ_{kj} dZ_{kj}^\dagger\right) \\
&= \sum_{k>j} \operatorname{tr}(dZ_{jk} dZ_{jk}^\dagger) - \sum_{k<j} \operatorname{tr}(dZ_{kj} dZ_{kj}^\dagger),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r}(m_{j+1} + \cdots + m_{r+1})\operatorname{tr}[H_j(Z)^{-1} d\bar{d}H_j(Z) \\
&\quad - H_j(Z)^{-1} dH_j(Z) H_j(Z)^{-1}\bar{d}H_j(Z)]_{Z=0}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant r+1} q_j \mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{jk}\mathrm{d}Z_{jk}^{\dagger}) - \sum_{1\leqslant k<j\leqslant r} q_j \mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{kj}\mathrm{d}Z_{kj}^{\dagger})$$

$$= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant r+1} (q_j - q_k)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{jk}\mathrm{d}Z_{jk}^{\dagger}) > 0. \tag{1.4.27}$$

因为

$$q_1 > q_2 > \cdots > q_r > q_{r+1} = 0, \tag{1.4.28}$$

这说明不变度量

$$\mathrm{d}s_q^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{r}(m_{j+1} + \cdots + m_{r+1}) \frac{\partial^2 \log \det H_j(Z)}{\partial z^{\alpha}\partial \overline{z}^{\beta}}\right] \times \mathrm{d}z^{\alpha}\,\overline{\mathrm{d}z^{\beta}}$$

是 Kähler 度量. 另外,(1.4.26)中第一个度量是由 $\mathfrak{T}(m_1,\cdots,m_{r+1})$诱导的 Kähler 度量,即在定理 1.4.1 中取

$$\lambda_j = m_j,\ \ j = 1,\cdots,r. \tag{1.4.29}$$

根据(1.4.6),得

$$\lambda_{jk} = \sum_{p=j}^{k-1} m_p,\ \ 1 \leqslant j < k \leqslant r+1. \tag{1.4.30}$$

而不变 Kähler 度量为

$$\mathrm{d}s_\lambda^2 = \sum_{j=1}^{r} m_j \mathrm{tr}\{[I + F_j(Z)F_j(Z)^{\dagger}]^{-1}\mathrm{d}F_j(Z) \times [I + F_j(Z)^{\dagger}F_j(Z)]^{-1}\mathrm{d}F_j(Z)^{\dagger}\}. \tag{1.4.31}$$

定理 1.4.8 旗流形 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$的唯一的不变 Kähler-Einstein度量为

$$\mathrm{d}s_\nu^2 = \mathrm{d}s_\lambda^2 + \mathrm{d}s_q^2,$$

其中 $\nu=\{\nu_{jk}\}$, $\nu_{jk}=\lambda_{jk}+q_j-q_k$, $1\leqslant j<k\leqslant r+1$,
而 λ_{jk}与 q_j 分别由(1.4.30)与(1.3.25)所定义.

第 2 章

旗　　域

在《典》著中，Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(m,n)$中有一超圆，即典型域 $\mathfrak{R}_I(m,n)$，而 $\mathfrak{F}(m,n)$可看作是 $\mathfrak{R}_I(m,n)$的扩充空间. 用对称空间的语言说，$\mathfrak{R}_I(m,n)$与 $\mathfrak{F}(m,n)$是互为对偶的空间. 本章就是研究旗流形有没有类似的情况，即是否存在 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$的一个有界可递域 $\mathfrak{R}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$，使得它有一个可递的全纯自同构组成的群，是 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$的 $SL(N,C)$诱导的全纯自同构群的子群.

§2.1　一些引理

从下面的引理，可以看到旗域应如何定义.

引理 2.1.1　设 B 是 $s_1\times s_2$ 复矩阵，P 是 $s_1\times s_1$ 非异方阵，则存在(s_1+s_2)阶方阵 $\mathfrak{T}\in SU(s_1,s_2)$，即适合

$$\mathfrak{T}J(s_1,s_2)\mathfrak{T}^\dagger = J(s_1,s_2) = \begin{pmatrix} I^{(s_1)} & 0 \\ 0 & -I^{(s_2)} \end{pmatrix},$$

使得

$$(I^{(s_1)},0) = P(I,B)\mathfrak{T}$$

的必要与充分的条件为

$$I - BB^\dagger > 0,\ \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} I & -B \\ -B^\dagger & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H^{-\frac{1}{2}}U_1 & 0 \\ 0 & K^{-\frac{1}{2}}U_2 \end{pmatrix},$$

其中 U_1 与 U_2 分别为 s_1 阶与 s_2 阶任意酉方阵，$\det U_1\cdot\det U_2=1$，

$$H = I - BB^{\dagger}\,,\ K = I - B^{\dagger} B,\ P = U_1^{-1} H^{-\frac{1}{2}}.$$

这引理的充分性的证明已隐含在《典》著的§2.1中.如果有另一个$\mathfrak{T}_1 \in SU(s_1,s_2)$适合条件,则如定理1.3.3的证明一样,可以证明

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix},$$

其中V_1与V_2分别是s_1阶与s_2阶酉方阵.

引理 2.1.2 若变换

$$(I,S) = Q(T)(I,T)\mathfrak{T},\ \mathfrak{T} \in SU(s_1,s_2),$$

适合条件

$$(I,0) = Q(B)(I,B)\mathfrak{T},\ I - BB^{\dagger} > 0,$$

则可记为

$$S = U^{-\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} (I - TB^{\dagger})^{-1} (T - B) K^{-\frac{1}{2}} U_2,$$

其中U_1与U_2分别为s_1阶、s_2阶酉方阵, $\det U_1 \det U_2 = 1$,这是把$I - TT^{\dagger} > 0$一一地映为$I - SS^{\dagger} > 0$.

证 实际上此引理的证明已完全隐含在《典》著的§2.1中,但在这里我们用另外的方法来证明.

首先证明:任一$\mathfrak{T} \in SU(s_1,s_2)$必可写为

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} I & -Z_0 \\ -Z_0^{\dagger} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(Z_0)^{-\frac{1}{2}} U_1 & 0 \\ 0 & K(Z_0)^{-\frac{1}{2}} U_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1.1}$$

其中U_1与U_2分别为s_1与s_2阶酉方阵, $\det U_1 \det U_2 = 1$, Z_0适合$I - Z_0 Z_0^{\dagger} > 0$.反之,给定$Z_0$,适合$I - Z_0 Z_0^{\dagger} > 0$,而$U_1$与$U_2$分别为$s_1$与$s_2$阶酉方阵,则$\mathfrak{T} \in SU(s_1,s_2)$.

实际上,令

$$\mathfrak{T} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 & s_2 \end{matrix} & \end{matrix},$$

由于$\mathfrak{T} \in SU(s_1,s_2)$,

$$\mathfrak{T}^{\dagger} J \mathfrak{T} = J,$$

此即

$$A^{\dagger} A - C^{\dagger} C = I,\ A^{\dagger} B = C^{\dagger} D,\ B^{\dagger} B - D^{\dagger} D = -I. \tag{2.1.2}$$

由此知 A 与 D 必为非异的. 令

$$Z_0 = -BD^{-1}. \tag{2.1.3}$$

由(2.1.2)的第二式知

$$C^{\dagger} = A^{\dagger} BD^{-1} = -A^{\dagger} Z_0, \tag{2.1.4}$$

以之代入第一式,得

$$A^{\dagger}(I - Z_0 Z_0^{\dagger})A = I,$$

故

$$A = (I - Z_0 Z_0^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} U_1 \quad (U_1\ 为酉方阵). \tag{2.1.5}$$

以之代入(2.1.4)式,得

$$C = -Z_0^{\dagger}(I - Z_0 Z_0^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} U_1. \tag{2.1.6}$$

同理,由(2.1.2)的第三式有

$$D^{\dagger}(I - D^{\dagger -1} B^{\dagger} BD^{-1})D = D^{\dagger}(I - Z_0^{\dagger} Z_0)D = I,$$

而得

$$D = (I - Z_0^{\dagger} Z_0)^{-\frac{1}{2}} U_2 \quad (U_2\ 为酉方阵), \tag{2.1.7}$$

以之代入(2.1.3)式得

$$B = -Z_0(I - Z_0^{\dagger} Z_0)^{-\frac{1}{2}} U_2. \tag{2.1.8}$$

以所得出的 A、B、C、D 代入 $\mathfrak{T}$,便有(2.1.1). 由于

$$\det\begin{pmatrix} I & -Z_0 \\ -Z_0^{\dagger} & I \end{pmatrix} = \det(I - Z_0 Z_0^{\dagger}),$$

故

$$\det U_1 \det U_2 = 1.$$

反之,由(2.1.1)定义的 $\mathfrak{T}$ 可直接验算适合

$$\mathfrak{T} J \mathfrak{T}^{\dagger} = J.$$

现取 Z 适合 $I - ZZ^{\dagger} > 0$,令

$$\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} I & Z \\ Z^{\dagger} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(Z)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & K(Z)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} H(Z)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & K(Z)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Z \\ Z^\dagger & I \end{pmatrix},$$

这是属于 $SU(s_1,s_2)$的，于是

$$\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T} \in SU(s_1,s_2),$$

故 $\mathfrak{T}_2$ 可写为

$$\mathfrak{T}_2 = \begin{pmatrix} H(W)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & K(W)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W \\ W^\dagger & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$I - WW^\dagger > 0.$$

比较 $\mathfrak{T}_2=\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}$ 两端第一行子矩阵，有

$$H(W)^{-\frac{1}{2}}(I,W) = H(Z)^{-\frac{1}{2}}(I,Z)\mathfrak{T} \begin{pmatrix} V_1^{-1} & 0 \\ 0 & V_2^{-1} \end{pmatrix},$$

或者

$$(I,W) = Q(I,Z) \begin{pmatrix} I & -Z_0 \\ -Z_0^\dagger & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} H(Z_0)^{-\frac{1}{2}}U_1V_1^{-1} & 0 \\ 0 & K(Z_0)^{-\frac{1}{2}}U_2V_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

这就证明了上面的变换把 $I-ZZ^\dagger>0$ 映入 $I-WW^\dagger>0$；此外，由于 $\mathfrak{T}_1=\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}^{-1}$，知此变换必是一一的. 引理证毕. ▌

值得注意的是：如 $\mathfrak{T}$ 为(2.1.1)的形式，则

$$\mathfrak{T}^{-1} = \begin{pmatrix} U_1^{-1} & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Z_0 \\ Z_0^\dagger & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} H(Z_0)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & K(Z_0)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \qquad (2.1.9)$$

引理 2.1.3　设有 Hermite 方阵

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & C \\ C^\dagger & -H_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} s_1 & s_2 \end{matrix}$$

其中 H_1、H_2 皆为 Hermite 方阵，H_2 为正定，$H_1+CH_2^{-1}C^\dagger$ 为正定，则存在方阵 A，使得

$$A^\dagger HA = J(s_1,s_2),$$

其中 A 必可写为以下的形式：

$$A = \begin{pmatrix} (H_1+CH_2^{-1}C^\dagger)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ H_2^{-\frac{1}{2}}C^\dagger & -H_2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1}\mathfrak{T}_1,$$

其中 $\mathfrak{T}_1$ 是 $SU(s_1,s_2)$ 中的任意方阵.

此引理是显然的.

引理 2.1.4　设 C_0 是 $(s_1+s_2)\times s_3$ 阶矩阵. 存在 s_1+s_2 阶非异方阵 Q 及 $\mathfrak{T}\in SU(s_1,s_2+s_3)$，使得

$$(I,0) = Q(I,C_0)\mathfrak{T}$$

的充要条件为

$$I - C_0^\dagger J(s_1,s_2)C_0 > 0,$$

此时

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} I & -C_0 \\ -C_0^\dagger J(s_1,s_2) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma(C_0)\mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & D_0(C_0)^{-\frac{1}{2}}U_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathfrak{T}_1$ 是 $SU(s_1,s_2)$ 的任意方阵，U_3 是 s_3 阶酉方阵.

$$\Gamma(C_0)= \begin{pmatrix} [I - C_{01}C_{01}^\dagger + C_{01}C_{02}^\dagger (I+C_{02}C_{02}^\dagger)^{-1}C_{02}C_{02}^\dagger]^{\frac{1}{2}} & 0 \\ (I+C_{02}C_{02}^\dagger)^{-\frac{1}{2}}C_{02}C_{02}^\dagger & -(I+C_{02}C_{02}^\dagger)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix},$$

$$D_0(C_0) = I - C_0^\dagger J(s_1,s_2)C_0.$$

证　记

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1+s_2 \\ s_3 \end{matrix}, \quad \text{(列阶 } s_1+s_2,\ s_3\text{)} \tag{2.1.10}$$

由　$$\mathfrak{T}^\dagger J(s_1,s_2+s_3)\mathfrak{T} = J(s_1,s_2+s_3)$$

知

$$
\begin{aligned}
&A^{\dagger} J(s_1,s_2)A - B^{\dagger} B = J(s_1,s_2),\\
&A^{\dagger} J(s_1,s_2)C - B^{\dagger} D = 0,\\
&C^{\dagger} J(s_1,s_2)C - D^{\dagger} D = -I.
\end{aligned} \tag{2.1.11}
$$

根据假设 $(I,0) = Q(I,C_0)\mathfrak{T} = Q(A + C_0B,\ C + C_0D)$,

必须

$$C = - C_0D. \tag{2.1.12}$$

以之代入(2.1.11)第三式,得

$$D^{\dagger} [C_0^{\dagger} J(s_1,s_2)C_0 - I]D = - I,$$

由此知必须

$$I - C_0^{\dagger} J(s_1,s_2)C_0 > 0 \tag{2.1.13}$$

及

$$D = [I - C_0^{\dagger} J(s_1,s_2)C_0]^{-\frac{1}{2}}U_3, \tag{2.1.14}$$

其中 U_3 是 s_3 阶酉方阵.

由(2.1.11)第二式知

$$B^{\dagger} = - A^{\dagger} J(s_1,s_2)C_0, \tag{2.1.15}$$

以之代入(2.1.11)第一式得

$$A^{\dagger} [J(s_1,s_2) - J(s_1,s_2)C_0C_0^{\dagger} J(s_1,s_2)]A = J(s_1,s_2). \tag{2.1.16}$$

令

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}, \quad s_3 \tag{2.1.17}$$

则

$$A^{\dagger} \begin{pmatrix} I - C_{01}C_{01}^{\dagger} & C_{01}C_{02}^{\dagger} \\ C_{02}C_{01}^{\dagger} & -(I + C_{02}C_{02}^{\dagger}) \end{pmatrix} A = J. \tag{2.1.18}$$

根据引理 2.1.3,得

$$
\begin{aligned}
A &= \Gamma(C_0)\mathfrak{T}_1\\
&= \begin{pmatrix} [I - C_{01}C_{01}^{\dagger} + C_{01}C_{02}^{\dagger}(I + C_{02}C_{02}^{\dagger})^{-1}C_{02}C_{01}^{\dagger}]^{\frac{1}{2}} & 0 \\ (I + C_{02}C_{02}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}C_{02}C_{01}^{\dagger} & -(I + C_{02}C_{02}^{\dagger})^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1} \mathfrak{T}_1,
\end{aligned} \tag{2.1.19}
$$

其中 $\mathfrak{T}_1$ 是 $SU(s_1,s_2)$ 的任意方阵. 以 A 代入(2.1.15),得

$$B=-C_0^\dagger J(s_1,s_2)\Gamma(C_0)\mathfrak{T}_1. \qquad (2.1.20)$$

由(2.1.19)、(2.1.20)、(2.1.12)、(2.1.14)知

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix}\Gamma(C_0)\mathfrak{T}_1 & -C_0D\\ -C_0^\dagger J\Gamma(C_0)\mathfrak{T}_1 & D\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}I & -C_0\\ -C_0^\dagger J(s_1,s_2) & I\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\Gamma(C_0)\mathfrak{T}_1 & 0\\ 0 & D_0(C_0)^{-\frac{1}{2}}U_3\end{pmatrix},$$

其中

$$D_0(C_0)=I-C_0^\dagger J(s_1,s_2)C_0.$$

引理证毕. ▌

引理 2.1.5 设有变换

$$(I,S)=Q(T)(I,T)\mathfrak{T},\quad \mathfrak{T}\in SU(s_1,s_2+s_3),$$

其中 T、S 皆为 $(s_1+s_2)\times s_3$ 阶矩阵, $Q(T)$ 为 s_1+s_2 阶方阵,适合条件

$$(I,0)=Q(C_0)(I,C_0)\mathfrak{T},$$

其中 C_0 为 $(s_1+s_2)\times s_3$ 阶矩阵,适合条件

$$I-C_0^\dagger J(s_1,s_2)C_0>0$$

时,则 T 在 C_0 的充分小邻域中,此变换可记为

$$S=\mathfrak{T}_1^{-1}\Gamma(C_0)^{-1}[I-TC_0^\dagger J(s_1,s_2)]^{-1}(T-C_0)D_0(C_0)^{-\frac{1}{2}}U_3,$$

其中 $\Gamma_0(C_0)$ 与 $D_0(C_0)$ 的定义如上一引理中所述. $\mathfrak{T}_1\in SU(s_1,s_2)$, U_3 为幺模酉方阵. 此外,此变换是一一的,并使得 S 适合

$$I-S^\dagger J(s_1,s_2)S>0.$$

证 实际上,我们把引理 2.1.4 得到的 $\mathfrak{T}$ 的表达式代入,然后比较两端子矩阵,便得到变换的 S 表达式. 不过要注意,比较第一个子方阵时,有

$$I = Q(T)[I - TC_0^\dagger J(s_1,s_2)]\Gamma(C_0)\mathfrak{T}_1.$$

这要求

$$\det[I - TC_0^\dagger J(s_1,s_2)] = \det[I - C_0^\dagger J(s_1,s_2)T] \neq 0.$$

根据假设,当 $T=C_0$ 时,上式不为 0,故当 T 充分接近 C_0 时,亦不为 0. 此外,当 T 适合条件

$$I - T^\dagger J(s_1,s_2)T > 0$$

时,根据上一引理,知

$$\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} I & JT \\ T^\dagger & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma(JT) & 0 \\ 0 & D_0(JT)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in SU(s_1,s_2+s_3).$$

令

$$\mathfrak{T}_2^\dagger = \mathfrak{T}_1^\dagger \mathfrak{T} \in SU(s_1,s_2+s_3),$$

同样可应用上一引理,因此必有 S 适合

$$I - S^\dagger J(s_1,s_2)S > 0,$$

使得

$$\mathfrak{T}_2 = \begin{pmatrix} I & JS \\ S^\dagger & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma(JS)\mathfrak{T}_2 & 0 \\ 0 & D_0(JS)^{-\frac{1}{2}}U_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathfrak{T}_2 \in SU(s_1,s_2)$, U_2 为酉方阵,此变换有逆变换

$$\mathfrak{T}_1^\dagger = \mathfrak{T}_2^\dagger \mathfrak{T}^{-1}.$$

故必是一一的. 引理证毕. ▌

引理 2.1.6 设 B_{12}、B_{13}、B_{23}分别为 $s_1 \times s_2$、$s_1 \times s_3$、$s_2 \times s_3$ 矩阵. 存在 $\mathfrak{T} \in SU(s_1,s_2+s_3)$及非异方阵

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}, \quad \text{(列: } s_1,\ s_2\text{)}$$

使得

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} I & B_{12} & B_{13} \\ 0 & I & B_{23} \end{pmatrix}\mathfrak{T}$$

的充要条件为

$$I - B_1B_1^\dagger > 0, \quad B_1 = (B_{12}, B_{13}),$$

$$I - B_2^\dagger J(s_1, s_2) B_2 > 0, \quad B_2 = \begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} I & -B_2 \\ -B_2^\dagger J_1 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1(B_2)\mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & D_1(B)U_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -B_1 \\ -B_1^\dagger & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1(B_1)^{-\frac{1}{2}}U_1 & 0 \\ 0 & K_1(B_1)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -R_{21}^\dagger & -(B_{13} - B_{12}B_{23}) \\ -B_{12}^\dagger & I + B_{12}^\dagger R_{21}^\dagger & -B_{23} \\ -B_{13}^\dagger & B_{23}^\dagger + B_{13}^\dagger R_{21}^\dagger & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} H_1(B_1)^{-\frac{1}{2}}U_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2(B_2)^{-\frac{1}{2}}U_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_1(B)^{-\frac{1}{2}}U_3 \end{pmatrix},$$

其中U_1、U_2、U_3分别是s_1阶、s_2阶、s_3阶酉方阵，适合

$$\det U_1 \det U_2 \det U_3 = 1,$$

$$\mathfrak{T}_1 \in SU(s_1, s_2), \quad \mathfrak{U}_2 \in U(s_2 + s_3),$$

式中$B = \{B_{12}, B_{13}, B_{23}\}$是一矩阵集合.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{-1}H_1(B_1)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ P_{22}R_{21} & U_2^{-1}H_2(B)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$R_{21} = R_{21}(B) = (I, B_{23})B_1^\dagger H_1(B_1)^{-1},$$

$$P_{22} = P_{22}(B) = U_2^{-1}H_2(B)^{-\frac{1}{2}},$$

$$H_2(B) = (I, B_{23})K_1(B_1)^{-1}(I, B_{23})^\dagger,$$

$$K_1(B_1) = I - B_1^\dagger B_1, \quad H_1(B_1) = I - B_1B_1^\dagger,$$

$K_2(B_{23}) = I + B_{23}B_{23}^{\dagger}$,

$D_1(B) = I - B_2^{\dagger} J(s_1, s_2) B_2$,

$$\Gamma_1(B) = \begin{pmatrix} [I - (B_{13} - B_{12}B_{23})B_{23}K_2^{-1}B_{23}^{\dagger} \\ \times (B_{13} - B_{12}B_{22})^{\dagger}]^{\frac{1}{2}} & 0 \\ (I + B_{23}B_{23}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}B_{23}(B_{13} - B_{12}B_{23})^{\dagger} & -(I + B_{23}B_{23}^{\dagger})^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

证 只证条件是必要的,充分性可直接验算.

由于假设包含了

$$(I, 0) = P_{11}(I, B_1)\mathfrak{T},\ \mathfrak{T} \in SU(s_1, s_2 + s_3), \tag{2.1.21}$$

而 $B_1 = (B_{12}, B_{13})$ 是 $s_1 \times (s_2 + s_3)$ 矩阵,根据引理 2.1.1,得

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} I & -B_1 \\ -B_1^{\dagger} & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_1^{-\frac{1}{2}}U_1 & 0 \\ 0 & K_1^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_2 \end{pmatrix},$$

$$P_{11} = U_1^{-1}H_1^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.1.22}$$

其中 U_1 与 $\mathfrak{U}_2$ 分别为 s_1 阶与 $s_2 + s_3$ 阶酉方阵,

$$H_1 = I - B_1B_1^{\dagger},\ K_1 = I - B_1^{\dagger}B_1, \tag{2.1.23}$$

必须

$$I - B_1B_1^{\dagger} > 0. \tag{2.1.24}$$

又假设可改写为

$$(I, 0) = P_1(I, B_2)\mathfrak{T}, \tag{2.1.25}$$

其中

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_{13} - B_{12}B_{23} \\ B_{23} \end{pmatrix},\ P_1 = P\begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{2.1.26}$$

根据引理 2.1.4,得

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} I & -B_2 \\ -B_2^{\dagger}J_1 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_1\mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & D_1^{-\frac{1}{2}}U_3 \end{pmatrix}, \tag{2.1.27}$$

其中

$$J_1 = J(s_1, s_2),\ \mathfrak{T}_1 \in SU(s_1, s_2),\ U_3 \in U(s_3),$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} [I - C_{13}C_{13}^{\dagger} + C_{13}B_{23}^{\dagger} \\ \quad \times (I + B_{23}B_{23}^{\dagger})^{-1}B_{23}C_{13}^{\dagger}]^{\frac{1}{2}} & 0 \\ (I + B_{23}B_{23}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}C_{13} & -(I + B_{23}B_{23}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} C_{13} \\ B_{23} \end{bmatrix}, \ C_{13} = B_{13} - B_{12}B_{23},$$

$$D_1 = I - B_2^{\dagger} J_1 B_2. \tag{2.1.28}$$

必须
$$I_1 - B_2^{\dagger} J_1 B_2 > 0. \tag{2.1.29}$$

记
$$\mathfrak{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix}. \tag{2.1.30}$$
$$\qquad s_1 \quad s_2 \quad s_3$$

根据(2.1.22)，得

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{-\frac{1}{2}}U_1 \\ -B_{12}^{\dagger}H_1^{-\frac{1}{2}}U_1 \\ -B_{13}^{\dagger}H_1^{-\frac{1}{2}}U_1 \end{bmatrix}. \tag{2.1.31}$$

根据(2.1.27)，得

$$\begin{bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{13}D_1^{-\frac{1}{2}}U_3 \\ -B_{23}D_1^{-\frac{1}{2}}U_3 \\ D_1^{-\frac{1}{2}}U_3 \end{bmatrix}. \tag{2.1.32}$$

引理的假设可写为：由 $T^{-1} = J(s_1, s_2+s_3)T^{\dagger} J(s_1, s_2+s_3)$，

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & -T_{12} & -T_{13} \\ -T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ -T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}^{\dagger}$$
$$= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{11}B_{12} & P_{11}B_{13} \\ P_{21} & P_{21}B_{12} + P_{22} & P_{21}B_{13} + P_{22}B_{23} \end{bmatrix}.$$

比较第二行子矩阵，可得

$$\begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{21}^{\dagger}P_{22}^{\dagger} \\ (I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})P_{22}^{\dagger} \\ (B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})P_{22}^{\dagger} \end{pmatrix}, R_{21} = P_{22}^{-1}P_{21}. \quad (2.1.33)$$

另一方面,假设也可写为

$$\begin{pmatrix} P_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ -R_{21}P_{11}^{-1} & P_{22}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & * \\ T_{21}+B_{23}T_{31} & T_{22}+B_{23}T_{32} & * \end{pmatrix}.$$

比较已写出来的子矩阵,有

$$R_{21} = (B_{12}^{\dagger}+B_{23}B_{13}^{\dagger})H_1^{-1} = (I,B_{23})(B_{12},B_{13})^{\dagger} H_1^{-1} \quad (2.1.34)$$

及

$$\begin{aligned} I &= P_{22}[I+B_{23}B_{23}^{\dagger}+(B_{12}^{\dagger}+B_{23}B_{13}^{\dagger})H_1^{-1} \\ &\quad \times (B_{12}^{\dagger}+B_{23}B_{13}^{\dagger})^{\dagger}]P_{22}^{\dagger} \\ &= P_{22}(I,B_{23})[I+B_1^{\dagger} H_1^{-1}B_1](I,B_{23})^{\dagger} P_{22}^{\dagger} \\ &= P_{22}(I,B_{23})K_1^{-1}(I,B_{23})^{\dagger} P_{22}^{\dagger}. \end{aligned}$$

因此

$$P_{22} = U_2^{-1}H_2^{-\frac{1}{2}}, \quad H_2 = (I,B_{23})K_1^{-1}(I,B_{23})^{\dagger}, \quad (2.1.35)$$

其中 U_2 为 s_2 阶酉方阵.

以 R_{21} 与 P_{22} 的值代入(2.1.33),便得到

$$\begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger} H_2^{-\frac{1}{2}}U_2 \\ [I+B_{12}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}]H_2^{-\frac{1}{2}}U_2 \\ [B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}H_1^{-1}B_1(I,B_{23})^{\dagger}]H_2^{-\frac{1}{2}}U_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1.36)$$

另一方面,由(2.1.28)可知

$$\begin{pmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(B_{13}-B_{12}B_{23})D_1^{-\frac{1}{2}}U_3 \\ -B_{23}D_1^{-\frac{1}{2}}U_3 \\ D_1^{-\frac{1}{2}}U_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.1.37)$$

由(2.1.27)又可知

$$\Gamma_1\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.1.38)$$

根据(2.1.33)、(2.1.31)、(2.1.36)，上式右端的 T_{jk} 已知，以它们代入上式，便得引理. ▌

引理 2.1.7 设有变换

$$\begin{pmatrix} I & S_{12} & S_{13} \\ 0 & I & S_{23} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q_{11}(T) & 0 \\ Q_{21}(T) & Q_{22}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T_{12} & T_{13} \\ 0 & I & T_{23} \end{pmatrix} \mathfrak{T},$$

其中 $\mathfrak{T}\in SU(s_1, s_2+s_3)$，$Q_{11}$、$Q_{21}$、$Q_{22}$分别为 $s_1\times s_1$、$s_2\times s_1$、$s_2\times s_2$ 矩阵，适合条件

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} = Q(B) \begin{pmatrix} I & B_{12} & B_{13} \\ 0 & I & B_{23} \end{pmatrix} \mathfrak{T},$$

$$I - B_1 B_1^{\dagger} > 0, \quad I - B_2^{\dagger} J(s_1, s_2) B_2 > 0$$

(这里沿用引理 2.1.6 的符号)，则当 T 适合

$$I - T_1 T_1^{\dagger} > 0, \quad I - T_2^{\dagger} J(s_1, s_2) T'_2 > 0$$

时，此变换可写作

$$S_1 = (S_{12}, S_{13})$$

$$= U_1^{-1} H_1(B_1)^{\frac{1}{2}} (I - T_1 B_1^{\dagger})^{-1} (T_1 - B_1) K_1(B_1)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{U}_2,$$

$$S_{23} = Q_{22}(T)\{T_{23} - B_{23} + L_{21}(T)[T_{13} - B_{13}$$

$$- (T_{12} - B_{12})B_{23}]\} D_1(B)^{-\frac{1}{2}} U_3,$$

其中

$$L_{21}(T) = (B_{12}^{\dagger} + T_{23} B_{13}^{\dagger})(I - T_1 B_1^{\dagger})^{-1},$$

$$Q_{11}(T)=U_1^{-1}H_1(B_1)^{\frac{1}{2}}(I-T_1B_1^{\dagger})^{-1},$$

$$\begin{aligned}Q_{22}(T)=U_2^{-1}H_2(B)^{\frac{1}{2}}\{I+B_{12}^{\dagger}R_{21}(B)^{\dagger}+T_{23}[B_{23}^{\dagger}\\+B_{13}^{\dagger}R_{21}(B)^{\dagger}]+L_{21}(T)[-R_{21}(B)^{\dagger}+T_{12}(I\\+B_{12}^{\dagger}R_{21}(B)^{\dagger})+T_{13}(B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}(B)^{\dagger})]\}^{-1},\end{aligned}$$

$$Q_{21}(T)=Q_{22}(T)L_{21}(T);$$

此外,S 必适合

$$I-S_1S_1^{\dagger}>0,\quad I-S_2^{\dagger}J(s_1,s_2)S_2>0,$$

并且此变换是一一的.

证 令 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$表示 $\mathfrak{F}(s_1,s_2,s_3)$中的开集,在 $\mathfrak{V}_0$ 坐标邻域中,由于 $\mathfrak{V}_0\cong C^N$, $N=s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3$,开集 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$在 $\mathfrak{V}_0$ 的局部坐标表示为

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)&=\{I-T_1T_1^{\dagger}>0,\quad I-T_2^{\dagger}J(s_1,s_2)T_2>0\}\\&=\{I-T_{12}T_{12}^{\dagger}-T_{13}T_{13}^{\dagger}>0,\quad I-(T_{13}-T_{12}T_{23})^{\dagger}(T_{13}\\&\qquad-T_{12}T_{23})+T_{23}^{\dagger}T_{23}>0\}.\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{F}(m_1,m_2,m_3)$是紧的,故 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$相对于 $\mathfrak{F}$ 的闭包也是紧的. 但是 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$在 C^N 中的部分,其相对于 C^N 不是紧的,因此是一无界开集. 当 $T_{12}=0,T_{13}=0$ 时,T_{23}的元素可以任意大. $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$是连通的,因为任一点可用 C^N 中的直线段$\{tT_{12},tT_{13},T_{23}\}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$把点$\{0,0,T_{23}\}$与 $T=\{T_{12},T_{13},T_{23}\}$点相联,而$\{0,0,T_{23}\}$可与$\{0,0,0\}$相联,故 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$是 C^N 中的连通域.

由引理的条件知 $B\in\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$. 应用引理 2.1.6 知,$\mathfrak{T}$ 必为以下的形式:

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}&V_{13}\\V_{21}&V_{22}&V_{23}\\V_{31}&V_{32}&V_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}I&-R_{21}(B)^{\dagger}&-(B_{13}-B_{12}B_{23})\\-B_{12}^{\dagger}&I+B_{12}^{\dagger}R_{21}(B)^{\dagger}&-B_{23}\\-B_{13}^{\dagger}&B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}(B)^{\dagger}&I\end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} H_1(B)^{-\frac{1}{2}}U_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2(B)^{-\frac{1}{2}}U_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_1(B)U_3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.39)$$

根据引理的假设

$$\begin{pmatrix} I & S_{12} & S_{13} \\ 0 & I & S_{23} \end{pmatrix} = Q(T)\begin{pmatrix} I & T_{12} & T_{13} \\ 0 & I & T_{23} \end{pmatrix}\mathfrak{T}.$$

比较上式两端第二行的子矩阵,并令

$$L_{21} = L_{21}(T) = Q_{23}(T)^{-1}Q_{21}(T), \qquad (2.1.40)$$

便有 $0 = Q_{22}(T)[L_{21}V_{11} + (L_{21}T_{12} + I)V_{21}$

$$+ (L_{21}T_{13} + T_{23})V_{31}]$$

$$= Q_{22}(T)[V_{21} + T_{23}V_{31} + L_{21}(V_{11} + T_{12}V_{21} + T_{13}V_{31})].$$

以(2.1.39)中 V_{jk} 的值代入上式,便可得到

$$L_{21}(T) = (B_{12}^{\dagger} + T_{23}B_{13}^{\dagger})(I - T_1B_1^{\dagger})^{-1}.$$

由

$$I = Q_{22}(T)[L_{21}V_{12} + (L_{21}T_{12} + I)V_{22} + (L_{21}T_{13} + T_{23})V_{32}],$$

以 V_{jk} 代入,得到

$$Q_{22}(T) = U_2^{-1}H_2(B)^{\frac{1}{2}}[V_{22} + T_{23}V_{32} + L_{21} \times (V_{12} + T_{12}V_{22} + T_{13}V_{32})]^{-1}.$$

最后,比较第二行第三个子矩阵,有

$$S_{23} = Q_{22}(Z)[L_{21}V_{13} + (I + L_{21}T_{12})V_{23} + (T_{23} + L_{21}T_{13})V_{33}].$$

以 V_{jk} 代入,便得到引理中的 S_{23} 的表达式.

引理 2.1.6 是应用引理 2.1.1 与 2.1.4 来证明的,此即对于任一 $\mathfrak{T} \in SU(s_1, s_2+s_3)$,必可以写为 (2.1.39) 的形式,其中 $B \in \mathfrak{D}(s_1, s_2, s_3)$. 反之,如 $B \in \mathfrak{D}(s_1, s_2, s_3)$,由(2.1.39)定义的 $\mathfrak{T}$ 必属于 $SU(s_1, s_2+s_3)$,这可直接验算之. 因此,当 $T \in \mathfrak{D}(s_1, s_2, s_3)$时,令

$$\mathfrak{T}_1=\begin{pmatrix} I & -R_{21}(T)^\dagger & -(T_{13}-T_{12}T_{23}) \\ -T_{12}^\dagger & I+T_{12}^\dagger R_{21}(T)^\dagger & -T_{23} \\ -T_{13}^\dagger & T_{23}^\dagger+T_{13}^\dagger R_{21}(T)^\dagger & I \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} H_1(T_1)^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & H_2(T)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & D_1^{-\frac{1}{2}}(T) \end{pmatrix},$$

则 $\mathfrak{T}_1\in SU(s_1,s_2+s_3)$，故 $\mathfrak{T}_2^\dagger=\mathfrak{T}_1^\dagger\mathfrak{T}\in SU(s_1,s_2+s_3)$.
因此必有 $S\in\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$，使得

$$\mathfrak{T}_2=\begin{pmatrix} I & -R_{21}(S)^\dagger & -(S_{13}-S_{12}S_{23}) \\ -S_{12}^\dagger & I+S_{12}^\dagger R_{21}(S)^\dagger & -S_{23} \\ -S_{13}^\dagger & S_{23}^\dagger+S_{13}^\dagger R_{21}(S)^\dagger & I \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} H_1(S)^{-\frac{1}{2}}V_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2(S)^{-\frac{1}{2}}V_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_1^{-\frac{1}{2}}(S)V_3 \end{pmatrix},$$

其中 V_1、V_2、V_3 是酉方阵. 故仿引理 2.1.6 的证明可证 $\mathfrak{T}$ 诱导的变换 $T\mapsto S$ 为 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)\to\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$. 由于有逆变换：

$$\mathfrak{T}_1^\dagger=\mathfrak{T}_2^\dagger\mathfrak{T}^{-1},$$

故 $\tau_{\mathfrak{T}}:\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)\to\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$是一一的. 引理证毕. ▍

引理 2.1.8 设 B_{12}、B_{13}、B_{23}分别为$(s_1+s_2)\times s_3$、$(s_1+s_2)\times s_4$、$s_3\times s_4$ 矩阵，存在

$$\mathfrak{T}\in SU(s_1,s_2+s_3+s_4),$$

和
$$P\in\Gamma(s_1+s_2,s_3),$$

使得

$$\overset{\qquad\qquad s_1+s_2\quad s_3\quad s_4}{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}}\begin{matrix} s_1+s_2 \\ s_3 \end{matrix} = P\begin{pmatrix} I & B_{12} & B_{13} \\ 0 & I & B_{23} \end{pmatrix}\mathfrak{T}$$

的充要条件为

$$I-B_1^\dagger J(s_1,s_2)B_1>0,\quad I-B_2^\dagger J(s_1,s_2+s_3)B_2>0,$$

此时

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix} I & -J_1R_{21}^{\dagger} & -(B_{13}-B_{12}B_{23}) \\ -B_{12}^{\dagger}J_1 & I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger} & -B_{23} \\ -B_{13}^{\dagger}J_1 & B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger} & I \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} \Gamma_1(B_1)\mathfrak{T}_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2(B)^{-\frac{1}{2}}U_3 & 0 \\ 0 & 0 & D_2(B_2)^{-\frac{1}{2}}U_4 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathfrak{T}_1\in SU(s_1,s_2)$，$U_3$、$U_4$ 分别为 s_3 阶、s_4 阶酉方阵，

$$R_{21}=R_{21}(B)=(I,B_{23})B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)[I-B_1B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)]^{-1},$$

$$H_2(B)=(I,B_{23})D_1(B_1)^{-1}(I,B_{23}),$$

$$D_1(B_1)=I-B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)B_1,\quad B_1=(B_{12},B_{13}),$$

$$D_2(B)=I-B_2^{\dagger}J(s_1,s_2+s_3)B_2,$$

$$B_2=\begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1(B_1)=\begin{pmatrix} [I-B_{01}(I+B_{02}^{\dagger}B_{02})^{-1}B_{01}^{*}]^{\frac{1}{2}} & 0 \\ (I+B_{02}B_{02}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}B_{02}B_{01}^{\dagger} & -(I+B_{02}B_{02}^{\dagger})^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$B_1=\underset{s_3+s_4}{\begin{pmatrix} B_{01} \\ B_{02} \end{pmatrix}}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix},\quad R_1(B_1)=I+B_{01}B_{01}^{\dagger}.$$

证　由于在假设中包含了

$$(I,0)=P_{11}(I,B_1)\mathfrak{T},\quad B_1=(B_{12},B_{13}),$$

而 B_1 是 $(s_1+s_2)\times(s_3+s_4)$ 矩阵，根据引理 2.1.4，当 $I-B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)B_1>0$ 时，

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix} I & -B_1 \\ -B_1^{\dagger}J(s_1,s_2) & I \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} \Gamma_1(B_1)\mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & D_1(B_1)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_3 \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1+s_2 \\ s_3+s_4 \end{matrix},\tag{2.1.41}$$

其中 $\mathfrak{U}_3$ 为 s_3+s_4 阶酉方阵，$\mathfrak{T}_1\in SU(s_1,s_2)$，

$$D_1(B_1)=I-B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)B_1, \tag{2.1.42}$$

$$\Gamma_1(B_1)=\begin{pmatrix}[I-B_{01}(I+B_{02}^{\dagger}B_{02})^{-1}B_{01}^{*}]^{\frac{1}{2}} & 0\\ (I+B_{02}B_{02}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}B_{02}B_{01}^{\dagger} & -(I+B_{02}B_{02}^{\dagger})^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{-1},$$

$$B_1=\underset{s_3+s_4}{\begin{pmatrix}B_{01}\\ B_{02}\end{pmatrix}}\begin{matrix}s_1\\ s_2\end{matrix},\quad R_1(B_1)=I+B_{01}B_{01}^{\dagger}. \tag{2.1.43}$$

由(2.1.41)知，$P_{11}=\mathfrak{T}_1^{-1}\Gamma_1(B_1)^{-1}(I-B_1B_1^{\dagger}J_1)^{-1}$. 同样，由

$$(I,0)=\widetilde{P}(I,B_2)\mathfrak{T},\quad B_2=\begin{pmatrix}I & B_{12}\\ 0 & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}B_{13}\\ B_{23}\end{pmatrix}$$

及引理 2.1.4 知，当 $I-B_2^{\dagger}J(s_1,s_2+s_3)B_2>0$ 时，有

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix}I & -B_2\\ -B_2^{\dagger}J(s_1,s_2+s_3) & I\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\Gamma_2(B_2)\mathfrak{T}_2 & 0\\ 0 & D_2(B_2)^{-\frac{1}{2}}U_4\end{pmatrix}\begin{matrix}s_1+s_2+s_3\\ s_4\end{matrix}, \tag{2.1.44}$$

其中 U_4 为 s_4 阶酉方阵，$\mathfrak{T}_2\in SU(s_1,s_2+s_3)$，

$$D_2(B_2)=I-B_2^{\dagger}J(s_1,s_2+s_3)B_2, \tag{2.1.45}$$

$$\Gamma_2(B_2)=\begin{pmatrix}[I-(B_{13}-B_{12}B_{23})(I+B_{23}^{\dagger}B_{23})^{-1}\\ \times(B_{13}-B_{12}B_{23})^{\dagger}]^{\frac{1}{2}} & 0\\ (I+B_{23}B_{23}^{\dagger})^{-\frac{1}{2}}B_{23}(B_{13}-B_{12}B_{23})^{\dagger} & -(I+B_{23}B_{23}^{\dagger})^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{-1}, \tag{2.1.46}$$

记

$$\mathfrak{T}=\underset{\begin{matrix}s_1+s_2 & s_3 & s_4\end{matrix}}{\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12} & V_{13}\\ V_{21} & V_{22} & V_{23}\\ V_{31} & V_{32} & V_{33}\end{pmatrix}}\begin{matrix}s_1+s_2\\ s_3\\ s_4\end{matrix},$$

同(2.1.41)及(2.1.44)作比较，得

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -B_{12}^{\dagger}J_1 \\ -B_{13}^{\dagger}J_1 \end{pmatrix} \Gamma_1(B_1)\mathfrak{T}_1,$$

$$\begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{13}+B_{12}B_{23} \\ -B_{23} \\ I \end{pmatrix} D_2(B_2)^{-\frac{1}{2}}U_4,$$

式中 $J_1 = J(s_1, s_2)$.

如同引理 2.1.7 的证明类似，由

$$\mathfrak{T}^{-1} = J(s_1, s_2+s_3+s_4)\mathfrak{T}^{*}J(s_1, s_2+s_3+s_4)$$

及

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1V_{11}^{\dagger}J_1 & -J_1V_{21}^{\dagger} & -J_1V_{31}^{\dagger} \\ -V_{12}^{\dagger}J_1 & V_{22}^{\dagger} & V_{32}^{\dagger} \\ -V_{13}^{\dagger}J_1 & V_{23}^{\dagger} & V_{33}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{11}B_{12} & P_{11}B_{13} \\ P_{21} & P_{22}+P_{21}B_{12} & P_{21}B_{13}+P_{22}B_{23} \end{pmatrix},$$

得出

$$\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_1R_{21}^{\dagger}P_{22}^{\dagger} \\ (I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})P_{22}^{\dagger} \\ (B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})P_{22}^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad R_{21} = P_{22}^{-1}P_{21},$$

则

$$\begin{aligned} R_{21} &= (V_{21}+B_{23}V_{31})P_{11} \\ &= (B_{12}^{\dagger}+B_{23}B_{13}^{\dagger})J_1(I-B_1B_1^{\dagger}J_1)^{-1} \\ &= (I, B_{23})B_1^{\dagger}J_1(I-B_1B_1^{\dagger}J_1)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.1.47}$$

及

$$\begin{aligned} I &= P_{22}(V_{22}+B_{23}V_{33})P_{22}^{\dagger} \\ &= P_{22}[(I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})+B_{23}(B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})]P_{22}^{\dagger} \\ &= P_{22}[(I, B_{23})(I, B_{23})^{\dagger}+(I, B_{23})B_1^{\dagger}J_1(I-B_1B_1^{\dagger}J_1)^{-1} \\ &\quad \times B_1(I, B_{23})^{\dagger}]P_{22}^{\dagger} \\ &= P_{22}(I, B_{23})[I+(I-B_1^{\dagger}JB_1)^{-1}B_1^{\dagger}JB_1](I, B_{23})^{\dagger}P_{22}^{\dagger} \\ &= P_{22}(I, B_{23})(I-B_1^{\dagger}JB_1)^{-1}(I, B_{23})^{\dagger}P_{22}^{\dagger}, \end{aligned}$$

故

$$P_{22}=U_3^{-1}H_2(B)^{-\frac{1}{2}},\ U_3 \text{ 是 } s_3\times s_3 \text{ 阶任意酉方阵},$$

$$H_2(B)=(I,B_{23})D_1(B_1)^{-1}(I,B_{23})^{\dagger}. \qquad (2.1.48)$$

引理证毕. ▌

引理 2.1.9 设变换

$$\begin{pmatrix} I & S_{12} & S_{13} \\ 0 & I & S_{23} \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1+s_2 \\ s_3 \end{matrix} = Q(T)\begin{pmatrix} I & T_{12} & T_{13} \\ 0 & I & T_{23} \end{pmatrix}\mathfrak{T},$$

$$s_1+s_2 \quad s_3 \quad s_4$$

式中

$$\mathfrak{T}\in SU(s_1,s_2+s_3+s_4),\ Q\in \Gamma(s_1+s_2,s_3)$$

适合

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} = Q(B)\begin{pmatrix} I & B_{12} & B_{13} \\ 0 & I & B_{23} \end{pmatrix}\mathfrak{T},$$

其中

$$I-B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)B_1>0,\quad B_1=(\underset{s_3}{B_{12}},\underset{s_4}{B_{13}})s_1+s_2,$$

$$I-B_2^{\dagger}J(s_1,s_2+s_3)B_2>0,\quad B_2=\begin{pmatrix} I & B_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{13} \\ B_{23} \end{pmatrix},$$

则此变换把适合以下条件的 T 点：

$$I-T_1^{\dagger}J(s_1,s_2)T_1>0,\quad I-T_2^{\dagger}J(s_1,s_2+s_3)T_2>0,$$

一一地映为适合以下条件的 S 点：

$$I-S_1^{\dagger}J(s_1,s_2)S_1>0,\quad I-S_2^{\dagger}J(s_1,s_2+s_3)S_2>0,$$

并且变换可写为(当 T 在 B 的一个邻域中)：

$$S_1=\mathfrak{T}_1^{-1}\Gamma_1(B_1)^{-1}[I-T_1B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)]^{-1}$$
$$\times[T_1-B_1]D_1(B_1)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_3$$

(这里沿用引理 2.1.8 的符号)，

$$S_{23}=Q_{22}(Z)\{T_{23}-B_{23}+L_{21}(T)[T_{13}-B_{13}$$
$$-(T_{12}-B_{12})B_{23}]\}D_2(B)^{-\frac{1}{2}}U_4,$$

其中 U_4 是 $s_4\times s_4$ 任意酉方阵，

$$L_{21}(T)=(I,T_{23})B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)[I-T_1B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)]^{-1},$$

$$\begin{aligned}Q_{22}(T)=U_3^{-1}H_2(B)^{\frac{1}{2}}\{&I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger}+T_{23}(B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})\\&+L_{21}(T)[-J(s_1,s_2)R_{21}^{\dagger}+T_{12}(I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})\\&+T_{13}(B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})]\}^{-1},\end{aligned}$$

$$R_{21}=R_{21}(B)=(I,B_{23})B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)[I-B_1B_1^{\dagger}J(s_1,s_2)]^{-1}.$$

证　利用(2.1.41)式,即得 S_1 的表达式.

令
$$L_{21}(T)=Q_{22}(T)^{-1}Q_{21}(T),\tag{2.1.49}$$
比较引理假设的变换两端的第二行子矩阵,有

$$0=Q_{22}(T)[V_{12}+T_{23}V_{31}+L_{21}(V_{11}+T_{12}V_{21}+T_{13}V_{31})],$$

并用引理 2.1.8 所证明的 V_{jk}值代入,得

$$\begin{aligned}L_{21}(T)&=-(V_{12}+T_{23}V_{13})(V_{11}+T_{12}V_{21}+T_{13}V_{31})^{-1}\\&=-[-B_{12}^{\dagger}J_1-T_{23}B_{13}^{\dagger}J_1][I-(T_{12}B_{12}^{\dagger}+T_{13}B_{13}^{\dagger})J_1]^{-1}\\&=(I,T_{23})B_1^{\dagger}J_1(I-T_1B_1^{\dagger}J_1)^{-1}.\end{aligned}\tag{2.1.50}$$

由

$$I=Q_{22}[V_{22}+T_{23}V_{32}+L_{21}(V_{12}+T_{12}V_{22}+T_{13}V_{32})],$$

以 V_{jk}代入,得

$$\begin{aligned}Q_{22}=U_3^{-1}H_2(B)^{\frac{1}{2}}\{&I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger}+T_{23}(B_{23}^{\dagger}+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})\\&+L_{21}(T)[-J_1R_{21}^{-}+T_{12}(I+B_{12}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})+T_{13}(B_{23}^{\dagger}\\&+B_{13}^{\dagger}R_{21}^{\dagger})]\}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.1.51}$$

比较第二行最后一个子矩阵,有

$$\begin{aligned}S_{23}&=Q_{22}[V_{23}+T_{23}V_{33}+L_{21}(T)(V_{13}+T_{12}V_{23}+T_{13}V_{33})]\\&=Q_{22}\{T_{23}-B_{23}+L_{21}(T)[T_{13}-B_{13}\\&\quad-(T_{12}-B_{12})B_{23}]\}D_2(B_2)^{-\frac{1}{2}}U_4.\end{aligned}\tag{2.1.52}$$

其他的证明变换是一一的,完全可仿引理 2.1.7 相应的证明,引理证毕. ▌

在引理 2.1.7 的证明中,域

$$\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)=\{I-T_1T_1>0,\ I-T_2^{\dagger}J(s_1,s_2)T_2>0\},$$

称之为 2-旗域,这是一个可递域.

若令

$$\mathfrak{D}_1(s_1,s_2,s_3) = I^{(s_3)} - T^\dagger J(s_1,s_2)T > 0, \quad T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}, \quad (s_3)$$

根据引理 2.1.8,这也是可递域.

所谓 2-旗域 $\mathfrak{D}(m_1,m_2,m_3)$是指 2-旗流形 $\mathfrak{F}(m_1,m_2,m_3)$中在 $\mathfrak{B}_0$ 的连通开集,它在 $SL(N,\mathbb{C})$的一子群诱导出 $\mathfrak{D}$ 的自同构,并在此等自同构下 $\mathfrak{D}$ 是可递的.

§2.2 r-旗域

在此只考虑 $r>1$,因为 $r=1$ 时,1-旗域就是 $R_I(m_1,m_2)$,在《典》著中已详细讨论过了. 另外,2-旗域的定义是在§2.1的引理证明过程中得出的,因此我们先推广§2.1的引理,从中进而定义任意的 r-旗域.

我们沿用§1.3的符号.

$$\mathfrak{Z}_r = \begin{pmatrix} I & Z_{12} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & Z_{2r} & Z_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & Z_{r,r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \quad (m_1, m_2, \ldots, m_r, m_{r+1}) \quad . \tag{2.2.1}$$

考虑 $\mathfrak{A}_r$ 在什么条件下,存在 $\mathfrak{T}\in SU(m_1,m_2+\cdots+m_{r+1})$,使得

$$\begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} = P\mathfrak{A}_r\mathfrak{T}, \quad P \in \Gamma(m_1,\cdots,m_r), \tag{2.2.2}$$

即

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & P_{r2} & \cdots & P_{rr} \end{pmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \\ m_r \end{matrix}, \qquad (2.2.3)$$
$$\qquad\quad m_1 \quad m_2 \qquad\quad m_r$$

这里

$$\mathfrak{A}_r=\begin{pmatrix} I & A_{12} & \cdots & A_{1r} & A_{1,r+1} \\ 0 & I & \cdots & A_{2r} & A_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & A_{r,r+1} \end{pmatrix}. \qquad (2.2.4)$$

首先(2.2.2)包含了

$$(I,0,\cdots,0)=P_{11}(I,A_1)\mathfrak{T},\quad A_1=(A_{12},\cdots,A_{1,r+1}).$$

根据引理 2.1.1,当且仅当 $I-A_1A_1^{\dagger}>0$ 时,

$$P_{11}=U_1^{-1}H_1(A_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix} I & -A_1 \\ -A_1^{\dagger} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1(A_1)^{-\frac{1}{2}}U_1 & 0 \\ 0 & K_1(A_1)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.2.5)$$

其中

$$H_1(A_1)=I-A_1A_1^{\dagger}>0,\quad K_1(A_1)=I-A_1^{\dagger}A_1.$$

又关于 $j>1$,(2.2.2)也包含了

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}=\widetilde{P}_{j+1}\begin{pmatrix} I & F_{j1}(A) & F_{j2}(A) \\ 0 & I & A_{j+1} \end{pmatrix}\mathfrak{T}, \qquad (2.2.6)$$

其中 F_{j1}、$F_{j2}(A)$的定义见定理 1.3.8,

$$\widetilde{P}_{j+1}=\begin{pmatrix} \mathfrak{W}_{jj}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}P_{j-1}\begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_{jj} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad (2.2.7)$$

$$P_{j+1}\in\Gamma(m_1,\cdots,m_{j+1}).$$

根据引理 2.1.6 知,当且仅当

$$I-F_j(A)^{\dagger}J(m_1,m_2+\cdots+m_j)F_j(A)>0 \qquad (2.2.8)$$

时,(2.2.6)才能成立,此时

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} I & -R_{j+1,1}(A)^{\dagger} & -[F_{j2}(A) - F_{j1}(A)A_{j+1}] \\ -F_{j1}(A)^{\dagger} & I+F_{j1}(A)^{\dagger}R_{j+1,1}(A)^{\dagger} & -A_{j+1} \\ -F_{j2}(A)^{\dagger} & I+F_{j2}(A)^{\dagger}R_{j+1,1}(A)^{\dagger} & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} H_j(A)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_j & 0 & 0 \\ 0 & R_j(A)^{-\frac{1}{2}}U_j & 0 \\ 0 & 0 & D_{j+1}^{-\frac{1}{2}}(A)U_{j+1} \end{pmatrix},$$

$$m_1+\cdots+m_j \qquad m_{j+1} \qquad m_{j+2}+\cdots+m_{r+1}$$

(2.2.9)

其中 $\mathfrak{U}_j$、U_j、U_{j+1}分别为 $m_1+\cdots+m_j$、m_{j+1}、$m_{j+2}+\cdots+m_{r+1}$阶酉方阵.

$$\begin{aligned} R_{j+1,1}(A) &= (I,A_{j+1})F_j(A)^{\dagger}H_j(A)^{-1}, \\ H_j(A) &= I-F_j(A)F_j(A)^{\dagger}, \\ R_j(A) &= (I,A_{j+1})K_j(A)^{-1}(I,A_{j+1}), \\ K_j(A) &= I-F_j(A)^{\dagger}F_j(A), \\ D_{j+1}(A) &= I-F_{j+1}(A)^{\dagger}J(m_1,m_2+\cdots+m_{j+1})F_{j+1}(A). \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

现作变换

$$\mathfrak{W}_r = Q_1(Z)\mathfrak{Z}_r\mathfrak{T}, \tag{2.2.11}$$

其中 $\mathfrak{T}\in SU(m_1,m_2+\cdots+m_{r+1})$，$Q_1\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$，适合

$$\begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} = Q_r(A)\mathfrak{A}_r\mathfrak{T}. \tag{2.2.12}$$

(2.2.11)与(2.2.12)包含了

$$\begin{pmatrix} I & F_{j1}(W) & F_{j2}(W) \\ 0 & I & W_{j+1} \end{pmatrix}$$

$$= Q_{j+1}(W)\begin{pmatrix} I & F_{j1}(Z) & F_{j2}(Z) \\ 0 & I & Z_{j+1} \end{pmatrix}\mathfrak{T}, \tag{2.2.13}$$

适合

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} = Q_{j+1}(A) \begin{pmatrix} I & F_{j1}(A) & F_{j2}(A) \\ 0 & I & A_{j+1} \end{pmatrix} \mathfrak{T}. \tag{2.2.14}$$

当 $j=0$ 时，根据引理 2.1.2，当

$$I - Z_1 Z_1^\dagger > 0, \quad I - A_1 A_1^\dagger > 0 \tag{2.2.15}$$

时，有

$$W_1 = U_1^{-1} H_1(A_1)^{\frac{1}{2}} (I - T_1 A_1^\dagger)^{-1} (Z_1 - A_1) K_1(A)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{U}_2, \tag{2.2.16}$$

$$H_1(A) = I - A_1 A_1^\dagger, K_1(A) = I - A_1^\dagger A_1, \tag{2.2.17}$$

其中 U_1 为任意的 m_1 酉方阵，$\mathfrak{U}_2$ 为 $m_2 + \cdots + m_{r+1}$ 阶酉方阵，这是将

$$I - Z_1 Z_1^\dagger > 0 \tag{2.2.18}$$

一一地映为

$$I - W_1 W_1^\dagger > 0$$

的全纯(实际上是有理)映照.

当 $r>1$，$j=1$ 时，由于

$$F_1(Z) = Z_1,$$

(2.1.13)化为

$$\begin{pmatrix} I & \mathfrak{W}_{12} & \mathfrak{W}_{1,r+1} \\ 0 & I & W_2 \end{pmatrix} = Q_2(Z) \begin{pmatrix} I & \mathfrak{Z}_{12} & \mathfrak{Z}_{1,r+1} \\ 0 & I & Z_2 \end{pmatrix} \mathfrak{T}.$$

适合

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} = Q_2(A) \begin{pmatrix} I & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{1,r+1} \\ 0 & I & A_2 \end{pmatrix} \mathfrak{T}.$$

应用引理 2.1.7 知，如令

$$A_{12} = \mathfrak{A}_{12}, A_{13} = \mathfrak{A}_{1,r+1}, A_{23} = A_2, Z_{13} = \mathfrak{Z}_{1,r+1}, Z_{23} = Z_2,$$

则有

$$W_2 = Q_{22}(Z)\{Z_2 - A_2 + L_{21}(Z)[Z_{13} - A_{13} - (Z_{12} - A_{12})A_{23}]\} D_1^{-\frac{1}{2}}(A) \mathfrak{U}_3, \tag{2.2.19}$$

其中

$$L_{21}(Z)=(A_{12}^{\dagger}+Z_{23}A_{13}^{\dagger})(I-Z_1A_1^{\dagger})^{-1},$$

$$\begin{aligned}Q_{22}(Z)=U_2^{-1}H_2(A)^{\frac{1}{2}}\{I&+A_{12}^{\dagger}R_{21}(A)^{\dagger}\\&+Z_{23}[A_{23}^{\dagger}+A_{13}^{\dagger}R_{21}(A)]\\&+L_{21}(Z)[-R_{21}(A)+Z_{12}(I+A_{12}^{\dagger}R_{21}(A)^{\dagger})\\&+Z_{13}(A_{23}^{\dagger}+A_{13}^{\dagger}R_{21}(A)^{\dagger})]\}^{-1},\end{aligned}\tag{2.2.20}$$

$$R_{21}(A)=(I,A_{23})A_1^{\dagger}H_1(A_1)^{-1},$$

$$D_1(A)=I-A_2^{\dagger}J(m_1,m_2)A_2,\quad J(m_1,m_2)=\begin{pmatrix}I^{(m_1)}&0\\0&-I^{(m_2)}\end{pmatrix}.$$

(2.1.16)与(2.1.19)一起,把域

$$\begin{aligned}&I-Z_1Z_1^{\dagger}>0,\\&I-F_1(Z)^{\dagger}J(m_1,m_2)F_1(Z)>0\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

一一地映为本身.

当 $j>1$ 时,应用引理 2.1.9 于(2.2.13)与(2.2.14),有

$$\begin{aligned}F_j(W)=\mathfrak{T}_j^{-1}\Gamma_j(A)[I&-F_j(Z)F_j(A)^{\dagger}\\&\times J(m_1,m_2+\cdots+m_j)]^{-1}\\&\times[F_j(Z)-F_j(A)]D_j(A)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}_j,\end{aligned}\tag{2.2.22}$$

$$\begin{aligned}W_{j+1}=Q_{j+1,j+1}(Z)\{&Z_{j+1}-A_{j+1}+L_{j+1}(Z)\\&\times[F_{j2}(Z)-F_{j2}(A)-(F_{j1}(Z)-F_{j1}(A))A_{j+1}]\}\\&\times D_{j+1}(A)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_{j+1},(j=1,\cdots,r-1),\end{aligned}\tag{2.2.23}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_{j+1,j+1}(Z)=U_{j+1}^{-1}H_{j+1}(A)^{\frac{1}{2}}\{I&+F_{j1}(A)^{\dagger}R_{j+1}(A)^{\dagger}\\&+Z_{j+1}[A_{j+1}^{\dagger}+F_{j2}(A)^{\dagger}R_{j+1}(A)^{\dagger}]\\&+L_{j+1}(Z)[-J(m_1,m_2+\cdots+m_j)R_{j+1}(A)^{\dagger}\\&+F_{j1}(Z)(I+F_{j1}(A)^{\dagger}R_{j+1}(A)^{\dagger})\\&+F_{j2}(Z)(A_{j+1}^{\dagger}+F_{j2}(A)^{\dagger}R_{j+1}(A)^{\dagger})]\}^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{j+1}(Z)=(I,Z_{j+1})F_j(A)^{\dagger}&J(m_1,m_2+\cdots+m_j)\\&\times[I-Z_{j+1}F_j(A)^{\dagger}J(m_1,m_2+\cdots+m_j)]^{-1},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{j+1}(A) = {} & (I, A_{j+1}) F_j(A)^{\dagger} J(m_1, m_2 + \cdots + m_{r+1}) \\
& \times [I - F_j(A) F_j(A)^{\dagger} J(m_1, m_2 + \cdots + m_{r+1})]^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
D_{j+1}(A) = I - F_{j+1}(A)^{\dagger} J(m_1, m_2 + \cdots + m_{j+1}) F_{j+1}(A),
$$

$$
\Gamma_j(A) = \begin{pmatrix} \begin{matrix}[I - G_{j1}(A)(I + G_{j2}(A)^{\dagger} G_{j2}(A))^{-1} \\ \times G_{j1}(A)^{\dagger}]^{\frac{1}{2}}\end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix}[I + G_{j2}(A) G_{j2}(A)^{\dagger}]^{\frac{1}{2}} \\ \times G_{j2}(A) G_{j1}(A)^{\dagger}\end{matrix} & -[I + G_{j2}(A) G_{j2}(A)^{\dagger}]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-2},
$$

$$
F_j(A) = \begin{pmatrix} G_{j1}(A) \\ G_{j2}(A) \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 + \cdots + m_{j-1} \\ m_j \end{matrix},
$$

$$
\quad m_{j+1} + \cdots + m_{r+1}
$$

$$
S_j(A) = I + G_{j1}(A) G_{j1}(A)^{\dagger}. \tag{2.2.24}
$$

变换(2.2.16)、(2.2.19)与(2.2.23)是将域

$$
I - Z_1 Z_1^{\dagger} > 0, \quad I - F_2(Z)^{\dagger} J(m_1, m_2) F_2(Z) > 0, \cdots,
$$

$$
I - F_{j+1}(Z)^{\dagger} J(m_1, m_2 + \cdots + m_{j+1}) F_{j+1}(Z) > 0 \tag{2.2.25}
$$

一一地映为其自身.

现定义 r-旗域($r>2$)

$$
\begin{aligned}
& \mathfrak{D}(m_1, \cdots, m_r, m_{r+1}) : I - Z_1 Z_1^{\dagger} > 0, \\
& I - F_j(Z)^{\dagger} J(m_1, m_2 + \cdots + m_j) F_j(Z) > 0 \\
& \quad (j = 1, \cdots, r),
\end{aligned}
$$

这是 r-旗流形 $\mathfrak{F}(m_1, \cdots, m_r, m_{r+1})$ 中 $\mathfrak{B}_0$ 坐标邻域的连通开集.

定理 2.2.1　域 $\mathfrak{D}(m_1, \cdots, m_r, m_{r+1})$ 在 $\mathfrak{T} \in SU(m_1, m_2 + \cdots + m_{r+1})$ 诱导的变换下不变,并且在此诱导的变换下是可递的.如果 $A \in \mathfrak{D}(m_1, \cdots, m_r, m_{r+1})$,当 $r>1$ 时,把 A 映为原点的变换能表达为(2.2.16)、(2.2.19)与$(2.2.23)_{j+1}$　($j=2, \cdots, r-1$)的形式.当 $r=2$时,变换能表达为(2.2.16)与(2.2.19)的形式.当 $r=1$ 时,变换为(2.2.16)形式,此时 $\mathfrak{D}(m_1, m_2) = R_I(m_1, m_2)$ 是典型域.

域 $\mathfrak{D}_1(1,1,1) : 1 - Z^{\dagger} J(1,1) Z > 0$,其中 $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$,即此

$$
1 - |z_1|^2 + |z_2|^2 > 0.
$$

这是 C^2 中的无界域.到目前为止,还是很少人研究多复变函数论

中的无界域. 我们已经知道它是一可递域,根据引理 2.1.5,把 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\in\mathfrak{D}_1(1.1.1)$映为原点的变换为

$$\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\mathfrak{T}_1^{-1}\Gamma(A)^{-1}\left[I-\begin{pmatrix}z_1\bar{a}_1 & -z_1\bar{a}_2\\ z_2\bar{a}_1 & -z_2\bar{a}_2\end{pmatrix}\right]^{-1}$$
$$\times\begin{pmatrix}z_1-a_1\\z_2-a_2\end{pmatrix}D_0(A)^{-\frac{1}{2}}e^{i\theta},$$

其中 $\mathfrak{T}_1\in SU(1,1)$. 最简单的是取 $e^{-i\theta}\mathfrak{T}_1=I$,

$$D_0(A)=1-|a_1|^2+|a_2|^2(>0),$$
$$\Gamma(A)=\begin{pmatrix}(1-|a_2|^2)^{-\frac{1}{2}}(1-|a_1|^2+|a_2|^2)^{\frac{1}{2}} & 0\\ \bar{a}_1a_2(1+|a_2|^2)^{-\frac{1}{2}} & -(1+|a_2|^2)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}^{-1},$$

则 $$\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\frac{(1-|a_1|^2+|a_2|^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-z_1\bar{a}_1+z_2\bar{a}_2}$$
$$\times\begin{pmatrix}\alpha[(1+z_2\bar{a}_2)(z_1-a_1)-z_1\bar{a}_2(z_2-a_2)]\\ \beta[(1+z_2\bar{a}_2)(z_1-a_1)-z_1\bar{a}_2(z_2-a_2)\\ +\gamma[z_2\bar{a}_1(z_1-a_1)+(1-z_1\bar{a}_1)(z_2-a_2)]\end{pmatrix}.$$

要直接验算此变换使 $\mathfrak{D}_1(1,1,1)$不变,是相当麻烦的事,不过我们可借助《典》著中的方法来直接验算. 更一般的,取 $Z=\underset{s_3}{\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\end{pmatrix}}\begin{matrix}s_1\\s_2\end{matrix}$,

令

$$\mathfrak{T}=\underset{s_1+s_2\quad s_3}{\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}}\begin{matrix}s_1+s_2\\ s_3\end{matrix},\qquad(2.2.26)$$

由 $\mathfrak{T}J(s_1,s_2+s_3)\mathfrak{T}^\dagger=J(s_1,s_2+s_3)$,知

$$AJ_1A^\dagger-CC^\dagger=J_1,$$
$$AJ_1B^\dagger-CD^\dagger=0,$$
$$BJ_1B^\dagger-DD^\dagger=-I,\qquad(2.2.27)$$

其中

$$J_1 = J(s_1, s_2). \tag{2.2.28}$$

根据条件

$$(I, W) = Q(Z)(I, Z)\mathfrak{T}, \tag{2.2.29}$$

可记为

$$\begin{aligned} W &= (A + ZB)^{-1}(C + ZD) \\ &= (J_1 B^{\dagger} + J_1 A^{\dagger} J_1 Z)(D^{\dagger} + C^{\dagger} J_1 Z)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

由此知

$$\begin{aligned} I - W^{\dagger} J_1 W = &(D + Z^{\dagger} J_1 C)^{-1}[(D + Z^{\dagger} J_1 C) \\ &\times (D^{\dagger} + C^{\dagger} J_1 Z) - (J_1 B^{\dagger} + J_1 A^{\dagger} J_1 Z)^{\dagger} J_1 \\ &\times (J_1 B^{\dagger} + J_1 A^{\dagger} J_1 Z)](D^{\dagger} + C^{\dagger} J_1 Z)^{-1} \\ = &(D + Z + J_1 C)^{-1}(I - Z^{\dagger} J_1 Z) \\ &\times (D^{\dagger} + C^{\dagger} J_1 Z)^{-1} > 0. \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

这证明了变换(2.2.30)将 $\mathfrak{D}_1(s_1, s_2, s_3)$ 一一地映为 $\mathfrak{D}_1(s_1, s_2, s_3)$，因为 $\mathfrak{T}$ 有逆变换. 由于 $\mathfrak{T}$ 适合

$$\mathfrak{T} J(s_1, s_2 + s_3)\mathfrak{T}^{\dagger} = J(s_1, s_2 + s_3),$$

必适合

$$\mathfrak{T}^{\dagger} J(s_1, s_2 + s_3)\mathfrak{T} = J(s_1, s_2 + s_3),$$

此即

$$\begin{aligned} &A^{\dagger} J_1 A - B^{\dagger} B = J_1,\ A^{\dagger} J_1 C - B^{\dagger} D = 0, \\ &C^{\dagger} J_1 C - D^{\dagger} D = -I. \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

若变换把 $Z = Z_0$ 映为 $W = 0$，即(2.2.30)适合

$$0 = (A + Z_0 B)^{-1}(C + Z_0 D).$$

由此知必须

$$C = -Z_0 D. \tag{2.2.33}$$

以之代入(2.2.32)中第三式，得

$$D^{\dagger}(I - Z_0^{\dagger} J_1 Z_0)D = I. \tag{2.2.34}$$

当 $Z_0\in\mathfrak{D}_1(s_1,s_2,s_3)$，由上式可知

$$D=D_0(Z_0)^{-\frac{1}{2}}U,\quad D_0(Z_0)=I-Z_0^\dagger J_1Z_0>0,\tag{2.2.35}$$

其中 U 为任意的 s_1+s_2 阶酉方阵.

由(2.2.32)中第二式与(2.2.33)知

$$B^\dagger=-A^\dagger J_1Z_0.\tag{2.2.36}$$

以之代入(2.2.32)中第一式，得出

$$A^\dagger(J_1-J_1Z_0Z_0^\dagger J_1)A=J_1.\tag{2.2.37}$$

由于 J_1 是非异的，故上式左端每一个方阵皆是非异的. 根据引理 2.2.4，

$$A=\Gamma(Z_0)\mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_1(\text{是任意的})\in SU(s_1,s_2),$$

$$\Gamma(Z_0)=\begin{pmatrix}[I-Z_{01}(I+Z_{02}^\dagger Z_{02})^{-1}Z_{01}^\dagger]^{\frac{1}{2}} & 0\\ (I+Z_{02}Z_{02}^\dagger)^{-\frac{1}{2}}Z_{02}Z_{01}^\dagger & -(I+Z_{02}Z_{02}^\dagger)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{-1},$$

$$Z_0=\underset{s_3}{\begin{pmatrix}Z_{01}\\ Z_{02}\end{pmatrix}}\begin{matrix}s_1\\ s_2\end{matrix}.\tag{2.2.38}$$

由此，根据(2.2.36)，(2.2.30)可写为

$$W=A^{-1}[I-ZZ_0^\dagger J_1]^{-1}(Z-Z_0)D,\tag{2.2.39}$$

其中 A、D 分别适合(2.2.37)、(2.2.34).

由(2.2.39)知，它的微分在 $Z=Z_0$ 为

$$\mathrm{d}W|_{Z=Z_0}=A^{-1}(I-Z_0Z_0^\dagger J_1)^{-1}\mathrm{d}ZD.$$

根据《典》著中附录的符号知，变换(2.1.30)的函数方阵在 Z_0 点为

$$\left.\frac{\partial W}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0}=(I-Z_0Z_0^\dagger J_1)'^{-1}A'^{-1}\cdot\times D.$$

如果我们把(2.2.27)中的 A 换为 $A\mathfrak{T}_1$，$\mathfrak{T}_1\in SU(s_1,s_2)$，(2.2.34)中的 D 换为 DU_1，$U_1\in SU(s_3)$，则变换(2.2.39)变为

$$\widetilde{W}=\mathfrak{T}_1^{-1}A^{-1}(I-ZZ_0^\dagger J_1)^{-1}(Z-Z_0)DU_1,\tag{2.2.40}$$

这仍然是把 Z_0 点映为原点，其函数方阵在 Z_0 点为

$$\left.\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0}=[(I-Z_0Z_0^\dagger J_1)'^{-1}A'^{-1}\cdot\times D][\mathfrak{T}_1'^{-1}\cdot\times U_1].\tag{2.2.41}$$

令

$$H_\lambda(0) = \lambda J(s_1, s_2) \cdot\times I^{(s_3)} \quad (\lambda \text{ 为正数}), \quad (2.2.42)$$

则有

$$H_\lambda(Z_0) = \left.\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0} H_\lambda(0) \left.\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0}^{\dagger}$$

$$= \left.\frac{\partial W}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0} H_\lambda(0) \left.\frac{\partial W}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0}^{\dagger}, \quad (2.2.43)$$

即 $H_\lambda(Z_0)$与 $SU(s_1, s_2+s_3)$中所取的把 Z_0 变为 0 点的变换无关. 由于 Z_0 可以是 $\mathfrak{D}_1(s_1, s_2, s_3)$中任一点,微分度量

$$ds_\lambda^2 = dzH_\lambda(z)dz^\dagger = \sum_{\alpha,\beta=1}^{M} h_{\alpha\bar{\beta}}(z, \lambda)dz^\alpha \overline{dz^\beta} \quad (2.2.44)$$

是不变微分度量,但根据(2.2.42),ds_λ^2 是一个伪(pseudo)Hermite 度量. 反之,如果有一个在 $SU(s_1, s_2+s_3)$下不变的 Hermite 度量,则 $SU(s_1, s_2+s_3)$使 0 点不变的子群即(2.2.39)中取 $Z_0=0$,必定有

$$A \in SU(s_1, s_2), \quad D \in SU(s_3).$$

若此度量的度量方阵在 0 点的值为 $H(0)$,则由

$$(A'^{-1} \cdot\times D)H(0) = H(0)(J_1 A'^{-1} J_1' \cdot\times D)$$

可知,$H(0)$必为(2.2.42)的形式.

令

$$h_\lambda(z) = \det H_\lambda(z) = (-1)^{s_2 s_3} \lambda^{(s_1+s_2)s_3} h(z), \quad (2.2.45)$$

其中

$$h(z_0) = \left|\det \frac{\partial W}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0}^2. \quad (2.2.46)$$

令

$$h_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{\partial^2 \log h_\lambda(z)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} = \frac{\partial^2 \log h(z)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}. \quad (2.2.47)$$

如果它所成的方阵 $H(z)$是非异的,则定义了伪 Kähler-Einstein 度量. 由于 A 是 s_1+s_2 阶方阵,D 是 s_3 阶方阵,根据(2.2.39),

$$\det \frac{\partial W}{\partial Z}\bigg|_{Z=Z_0} = [\det A^{-1}\det(I - Z_0J_1Z_0^\dagger)^{-1}]^{s_3}\ [\det D]^{s_1-s_2}\ .$$

由于

$$\det(I - Z_0Z_0^\dagger J_1) = \det(I - Z_0^\dagger J_1Z_0),$$

而由(2.2.37)与(2.2.34),有

$$|\det A^{-1}|^2 = |\det(J_1 - J_1Z_0Z_0^\dagger J_1)| = |\det(I - Z_0^\dagger J_1Z_0)|,$$

$$|\det D|^2 = \det(I - Z_0^\dagger J_1Z_0)^{-1},$$

故(2.2.46)化为

$$h(Z_0) = \left|\det \frac{\partial W}{\partial Z}\right|^2_{Z=Z_0} = \det(I - Z_0^\dagger J_1Z_0)^{-(s_1+s_2+s_3)}, \tag{2.2.48}$$

其中 Z_0 可以是 $\mathfrak{D}_1(s_1,s_2,s_3)$的任一点.

引进微分度量

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{M} h_{\alpha\bar\beta}(z)dz^\alpha \overline{dz^\beta}, \tag{2.2.49}$$

其中 $h_{\alpha\bar\beta}$由(2.2.47)定义. 这里 $M=(s_1+s_2)s_3$,

$$z = (z^1,\cdots,z^M)$$

是把矩阵 Z 的元素排列成一向量,由于(2.2.48)

$$\begin{aligned}
ds^2 &= d\bar{d}\log h(z)\\
&= -N d\,\mathrm{tr}\{(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}\bar{d}(I - Z^\dagger J_1Z)\}\\
&= N\mathrm{tr}\{(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}dZ^\dagger J_1dZ\\
&\quad + (I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}Z^\dagger J_1dZ(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}dZ^\dagger J_1Z\}\\
&= N\mathrm{tr}\{(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}dZ^\dagger [I + J_1Z(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}Z^\dagger]J_1dZ\}\\
&= N\mathrm{tr}\{(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}dZ^\dagger [I + (I - J_1ZZ^\dagger)^{-1}J_1ZZ^\dagger]J_1dZ\}\\
&= N\mathrm{tr}\{(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}dZ^\dagger (I - J_1ZZ^\dagger)^{-1}J_1dZ\},
\end{aligned}$$

故

$$ds^2 = N\mathrm{tr}\{(I - ZZ^\dagger J_1)^{-1}dZ(I - Z^\dagger J_1Z)^{-1}dZ^\dagger J_1\}. \tag{2.2.50}$$

当 $Z=0$ 时,

$$\begin{aligned}
ds^2|_{Z=0} &= N\mathrm{tr}(dZdZ^\dagger J_1) = N\mathrm{tr}(dZ^\dagger J_1dZ)\\
&= N\mathrm{tr}(dZ_1^\dagger dZ_1) - N\mathrm{tr}(dZ_2^\dagger dZ_2),
\end{aligned}$$

故 $H(0)$有 s_1s_3 个特征根为正，s_2s_3 个特征根为负，方阵

$$H(z) = (h_{\alpha\bar{\beta}}(z))_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant M}$$

也是如此.

定理 2.2.2 域

$$\mathfrak{D}_1(s_1,s_2,s_3): I - Z^{\dagger} J(s_1,s_2)Z > 0,$$

其中

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}$$

$$s_3$$

是在 $SU(s_1,s_2+s_3)$下可递的，并且有唯一的(在相差非零常数因子的意义下)伪 Kähler-Einstein 在 $SU(s_1,s_2+s_3)$下的不变度量(2.2.50)；此外，使原点固定不变的 $SU(s_1,s_2+s_3)$ 的子群为 $SU(s_1,s_2)\times SU(s_3)$，因此

$$\mathfrak{D}_1(s_1,s_2,s_3) \cong SU(s_1,s_2+s_3)/[SU(s_1,s_2)\times SU(s_3)].$$

现在考虑域

$$\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3): I - Z_1Z_1^{\dagger} > 0, I - Z_2^{\dagger}\mathfrak{T}(s_1,s_2)Z_2 > 0,$$

$$Z_1 = (Z_{12},Z_{13})s_1,$$

$$\quad s_2 \quad s_3$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} I & Z_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_{13} \\ Z_{23} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} = F_2(Z).$$

$$s_3 \tag{2.2.51}$$

这可看作把 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$安装在 Grassmann 流形拓扑积 $\mathfrak{F}(s_1,s_2+s_3)\times\mathfrak{F}(s_1+s_2,s_3)$中的域，由此根据以上定理，可诱导出 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$的微分度量

$$\begin{aligned} ds_\lambda^2 = {} & \lambda_1 \mathrm{tr}[(I - Z_1Z_1^{\dagger})^{-1}dZ_1(I - Z_1^{\dagger}Z_1)^{-1}dZ_1^{\dagger}] \\ & + \lambda_2 \mathrm{tr}[(I - Z_2Z_2^{\dagger}J_1)^{-1}dZ_2(I - Z_2^{\dagger}J_1Z_2)^{-1}dZ_2^{\dagger}J_1], \end{aligned} \tag{2.2.52}$$

$$J_1 = J(s_1,s_2).$$

在 $Z=0$ 时，

$$ds_\lambda^2 = \lambda_1 \mathrm{tr}(dZ_{12}dZ_{12}^{\dagger} + dZ_{13}dZ_{13}^{\dagger})$$

$$+\lambda_2\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{13}^{\dagger}\mathrm{d}Z_{13}-\mathrm{d}Z_{23}^{\dagger}\mathrm{d}Z_{23})$$
$$=\lambda_1\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{12}\mathrm{d}Z_{12}^{\dagger})+(\lambda_1+\lambda_2)$$
$$\times\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{13}\mathrm{d}Z_{13}^{\dagger})-\lambda_2\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{23}\mathrm{d}Z_{23}^{\dagger}).\qquad(2.2.53)$$

这表示(2.2.52)的度量方阵 $H_\lambda(Z)$ 在原点的值为

$$H_\lambda(0)=\begin{pmatrix}\lambda_1 I & 0 & 0\\ 0 & (\lambda_1+\lambda_2)I & 0\\ 0 & 0 & -\lambda_2 I\end{pmatrix}\begin{matrix}s_1s_2\\ s_1s_3,\\ s_2s_3\end{matrix}\qquad(2.2.54)$$

而度量方阵在任一点 $Z_0\in\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$ 的值为

$$H_\lambda(z_0)=\left.\frac{\partial W}{\partial Z}\right|_{Z=Z_0}H_\lambda(0)\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)^{\dagger}_{Z=Z_0},\qquad(2.2.55)$$

其中 $W=f(Z,Z_0)$ 是 $SU(s_1,s_2+s_3)$ 诱导的 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$ 的自同构，把 z_0 点映为原点，λ_1、λ_2 可以为任意的非零实数. 与 $\mathfrak{D}_1(s_1,s_2,s_3)$ 的情况不同的是:如果取 λ_2 为负数,可取 λ_1 使

$$\lambda_{12}=\lambda_1>0,\ \lambda_{13}=\lambda_1-\lambda_{23}>0,\ \lambda_{23}=-\lambda_2>0,\qquad(2.2.56)$$

则(2.2.54)是一正定方阵,而(2.2.53)乃是一 Kähler 度量. 根据(2.2.55),

$$h_\lambda(z_0)=\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}h(z_0),\qquad(2.2.57)$$

其中

$$h(z_0)=\left|\det\frac{\partial W}{\partial Z}\right|^2_{z=z_0}.\qquad(2.2.58)$$

若能证明

$$h_{\alpha\bar\beta}(z)=\frac{\partial^2\log h(z)}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}\quad(\alpha,\beta=1,\cdots,M)\qquad(2.2.59)$$

所成的方阵是正定的,

$$M=s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3,$$

则

$$\mathrm{d}s_E^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{M}h_{\alpha\bar\beta}(z)\mathrm{d}z^\alpha\,\overline{\mathrm{d}z^\beta}\qquad(2.2.60)$$

是唯一的 $\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3)$ 中在 $SU(s_1,s_2+s_3)$ 下不变的 Kähler-Ein-

stein 度量.

根据引理 2.1.7，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W_1|_{Z=Z_0} &= U_1^{-1}H_1(Z_{01})^{\frac{1}{2}}(I - Z_{01}Z_{01}^{\dagger})^{-1} \\
&\quad \times \mathrm{d}Z_1K_1(Z_{01})^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{U}_2, \\
\mathrm{d}W_{23}|_{Z=Z_0} &= Q_{22}(Z_0)\{\mathrm{d}Z_{23} + L_{21}(Z_0) \\
&\quad \times (\mathrm{d}Z_{13} - \mathrm{d}Z_{12}Z_{023})\}D_1^{-\frac{1}{2}}(Z_0)U_3, \\
Z_0 &= \{Z_{012}, Z_{013}, Z_{023}\}, \\
Z_{01} &= (Z_{012}, Z_{013}).
\end{aligned}
\tag{2.2.61}
$$

由此知

$$
\begin{aligned}
\left|\det \frac{\partial W}{\partial Z}\right|^2_{Z=Z_0} &= \det H_1(Z_{01})^{-(s_2+s_3)}\det K_1(Z_{01})^{-s_1} \\
&\quad \times |\det Q_{22}(Z_0)|^{2s_3}\det D_1(Z_0)^{-s_2} \\
&= \det(I - Z_{01}Z_{01}^{\dagger})^{-N} \\
&\quad \times \det[I - Z_{02}^{\dagger}J(s_1,s_2)Z_{02}]^{-s_2} \\
&\quad \times |\det Q_{22}(Z_0)|^{2s_3},
\end{aligned}
\tag{2.2.62}
$$

其中，根据引理 2.1.6 及(2.1.35)，$Q_{22}(Z_0)=P_{22}$，故

$$
\begin{aligned}
|\det Q_{22}(Z_0)|^2 &= \det H_2(Z_0)^{-1} \\
&= \det[(I,Z_{023})K_1(Z_0)^{-1}(I,Z_{023})^{\dagger}]^{-1},
\end{aligned}
\tag{2.2.63}
$$

$$
K_1(Z_0) = I - Z_{01}^{\dagger}Z_{01}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \det(I - Z_1Z_1^{\dagger})^{-N}\det(I - Z_2^{\dagger}J_1Z_2)^{-s_2} \\
&\quad \times \det H_2(Z)^{-s_3}.
\end{aligned}
\tag{2.2.64}
$$

据此，(2.2.60)为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s_E^2 &= N\mathrm{tr}[(I - Z_1Z_1^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z_1(I - Z_1^{\dagger}Z_1)^{-1}\mathrm{d}Z_1^{\dagger}] \\
&\quad + s_2\mathrm{tr}[(I - Z_2Z_2^{\dagger}J_1)^{-1}\mathrm{d}Z_2(I - Z_2^{\dagger}J_1Z_2)^{-1}\mathrm{d}Z_2^{\dagger}J_1] \\
&\quad - s_3\mathrm{tr}[H_2(Z)^{-1}\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}H_2(Z) \\
&\quad - H_2(Z)^{-1}\mathrm{d}H_2(Z)^{-1}\mathrm{d}H_2(Z)^{\dagger}].
\end{aligned}
\tag{2.2.65}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}H_2(Z) = & (0,\mathrm{d}Z_{23})K_1(Z)^{-1}(I,Z_{23})^\dagger \\
& + (I,Z_{23})K_1(Z)^{-1}Z_1^\dagger \,\mathrm{d}Z_1K_1(Z)^{-1}(I,Z_{23})^\dagger ,\\
\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}H_2(Z) = & (0,\mathrm{d}Z_{23})K_1(Z)^{-1}(0,\mathrm{d}Z_{23})^\dagger \\
& + (0,\mathrm{d}Z_{23})K_1(Z)^{-1}\mathrm{d}Z_1^\dagger \, Z_1K_1(Z)^{-1}(I,Z_{23})^\dagger \\
& + (I,Z_{23})K_1(Z)^{-1}Z_1^\dagger \,\mathrm{d}Z_1K_1(Z)^{-1}(0,\mathrm{d}Z_{23})^\dagger \\
& + (I,Z_{23})K_1(Z)^{-1}\mathrm{d}Z_1^\dagger \,\mathrm{d}Z_1K_1(Z)^{-1}(I,Z_{23})^\dagger \\
& + (I,Z_{23})K_1(Z)^{-1}Z_1^\dagger \,\mathrm{d}Z_1K_1(Z)^{-1}\mathrm{d}Z_1^\dagger \, Z_1 \\
& \times K_1(Z)^{-1}(I,Z_{23})^\dagger \; + (I,Z_{23})K_1(Z)^{-1}\mathrm{d}Z_1^\dagger \, Z_1 \\
& \times K_1(Z)^{-1}Z_1^\dagger \,\mathrm{d}Z_1K_1(Z)^{-1}(I,Z_{23})^\dagger ,
\end{aligned}
$$

特别是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}H_0(Z)\,|_{Z=0} &= 0,\\
\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}H(Z) &= (0,\mathrm{d}Z_{23})(0,\mathrm{d}Z_{23})^\dagger \\
&\quad + (I,0)\mathrm{d}Z_1^\dagger \,\mathrm{d}Z_1(I,0)^\dagger \\
&= \mathrm{d}Z_{23}\mathrm{d}Z_{23}^\dagger + \mathrm{d}Z_{12}^\dagger\mathrm{d}Z_{12},
\end{aligned}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s_E^2\,|_{Z=0} = & N\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{12}\mathrm{d}Z_{12}^\dagger + \mathrm{d}Z_{13}\mathrm{d}Z_{13}^\dagger)\\
& + s_2\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{13}\mathrm{d}Z_{13}^\dagger - \mathrm{d}Z_{23}\mathrm{d}Z_{23}^\dagger)\\
& - s_3\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{23}\mathrm{d}Z_{23}^\dagger + \mathrm{d}Z_{12}^\dagger\mathrm{d}Z_{12})\\
= & (s_1+s_2)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{12}\mathrm{d}Z_{12}^\dagger) + (s_1+2s_2+s_3)\\
& \times \mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{13}\mathrm{d}Z_{13}^\dagger) - (s_2+s_3)\mathrm{tr}(\mathrm{d}Z_{23}\mathrm{d}Z_{23}^\dagger).
\end{aligned}
\tag{2.2.66}
$$

然而，这不是正定的，因此，(2.2.65)定义的 $\mathrm{d}s_E^2$ 只是伪Kähler-Einstein度量.

定理 2.2.3 2-旗域

$$
\mathfrak{D}(s_1,s_2,s_3):I - Z_1Z_1^\dagger > 0,\; I - Z_2^\dagger J(s_1,s_2)Z_2 > 0,
$$

$$
Z_1 = (\underset{s_2}{Z_{12}},\underset{s_3}{Z_{13}})_{s_1},\quad Z_2 = \begin{pmatrix} Z_{13}-Z_{12}Z_{23} \\ \underset{s_3}{Z_{23}} \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}
$$

存在 $SU(s_1,s_2+s_3)$下不变的 Kähler 度量.

$$ds^2=\mu_1\mathrm{tr}[(I-Z_1Z_1^\dagger)^{-1}dZ_1(I-Z_1^\dagger Z_1)^{-1}dZ_1^\dagger]$$
$$-\mu_2\mathrm{tr}[(I-Z_2Z_2^\dagger J_1)^{-1}dZ_2(I-Z_2^\dagger J_1Z_2)^{-1}dZ_2^\dagger J_1],$$

其中 $\mu_1>\mu_2>0$,但不存在不变的 Kähler-Einstein 度量,仅存在唯一的不变的伪 Kähler-Einstein 度量(2.2.65).

现在研究 $r>2$ 的 r-旗域

$$\mathfrak{D}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1}):I-T_1T_1^\dagger>0,$$
$$I-T_j^\dagger J(m_1,m_2+\cdots+m_j)T_j>0,$$
$$T_j=F_j(Z)\quad(j=2,\cdots,r),\ Z=\{Z_{12},Z_{13},\cdots,Z_{r,r+1}\}.$$

把安装

$$\iota:\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})\to\mathfrak{T}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$$

限制在 $\mathfrak{D}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$,得出

$$\mathfrak{T}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})=\mathfrak{F}(p_1,q_1)\times\cdots\times\mathfrak{F}(p_r,q_r),\qquad(2.2.67)$$
$$p_j=m_1+\cdots+m_j,\quad q_j=m_{j+1}+\cdots+m_{r+1}$$
$$(j=1,\cdots,r)$$

中域的拓扑积

$$I-T_1T_1^\dagger>0,$$
$$I-T_j^\dagger J(m_1,m_2+\cdots+m_j)T_j>0\quad(j=2,\cdots,r)$$
$$(2.2.68)$$

的像域 $\iota(\mathfrak{D}(m_1,\cdots,m_{r+1}))$. 于是根据以上定理,得出(2.2.68)定义的在$[SU(m_1,m_2+\cdots+m_{r+1})]^r$ 下不变的伪 Kähler 度量诱导出 $\mathfrak{D}(m_1,\cdots,m_{r+1})$在 $SU(m_1,m_2+\cdots+m_{r+1})$不变的伪 Kähler 度量:

$$ds_\lambda^2=\lambda_1\mathrm{tr}[(I-Z_1Z_1^\dagger)^{-1}dZ_1(I-Z_1^\dagger Z_1)^{-1}dZ_1^\dagger]$$
$$+\sum_{j=2}^{r}\lambda_j\mathrm{tr}\{[I-F_j(Z)F_j(Z)^\dagger J_{j-1}]^{-1}dF_j(Z)$$
$$\times[I-F_j(Z)^\dagger J_{j-1}F_j(Z)]^{-1}dF_j(Z)^\dagger J_{j-1}\},$$
$$J_{j-1}=J(m_1,m_2+\cdots+m_j)\quad(j=2,\cdots,r).\qquad(2.2.69)$$

能否取 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$,使之成为 Kähler 度量,只须看 $Z=0$ 点就足够了.

$$\begin{aligned} ds_\lambda^2|_{Z=0} = & \lambda_1 \mathrm{tr}\left(\sum_{q=2}^{r+1} dZ_{1q} Z_{1q}^\dagger\right) \\ & + \sum_{j=2}^{r} \lambda_j \mathrm{tr}\left(\sum_{q=j+1}^{r+1} dZ_{1q} dZ_{1q}^\dagger - \sum_{p=2}^{j}\sum_{q=j+1}^{r+1} dZ_{pq} dZ_{pq}^\dagger\right) \\ = & \sum_{q=2}^{r+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{q-1}) \mathrm{tr}(dZ_{1q} dZ_{1q}^\dagger) \\ & - \sum_{j=2}^{r} \lambda_j \mathrm{tr}\left(\sum_{q=j+1}^{r+1} dZ_{pq} dZ_{pq}^\dagger\right), \end{aligned} \tag{2.2.70}$$

上式为正定的，若取

$$\lambda_2 = -\mu_2 < 0, \cdots, \lambda_r = -\mu_r < 0,\ \lambda_1 = \mu_1 > \mu_2 + \cdots + \mu_r,$$

当 $\mu_2, \cdots, \mu_r$ 取定后，取 λ_1 足够大，上式是正定的. 如证定理 2.2.2 一样，只不过计算更为复杂点，可以证明不存在不变的Kähler-Einstein度量.

定理 2.2.4　当 $r \geqslant 2$ 时，r-旗域 $\mathfrak{D}(m_1, \cdots, m_r, m_{r+1})$ 在 $SU(m_1, m_2 + \cdots + m_{r+1})$ 下是可递的. 当在(2.2.69)中取 $\lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为负数，而 λ_1 是足够大的正数，这是 $\mathfrak{D}(m_1, \cdots, m_{r+1})$ 的不变 Kähler 度量. 但不存在不变的 Kähler-Einstein 度量.

故 $r>1$ 时，r-旗域不是对称空间，因为 Hermite 对称空间必有不变的 Kähler-Einstein 度量.

最后考虑 $\mathfrak{D}(m_1, \cdots, m_r, m_{r+1})$ 使原点不动的 $SU(m_1, m_2 + \cdots + m_r)$ 的子群，实际上，由

$$\begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{T},$$

其中 $\mathfrak{T} \in SU(m_1, m_2 + \cdots + m_{r-1})$，$P \in \Gamma(m_1, \cdots, m_r)$. 比较第一行子矩阵，知

$$(I^{(m_1)}, 0, \cdots, 0) = P_{11}(I^{(m_1)}, 0, \cdots, 0)\mathfrak{T},$$

可知必须

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 + \cdots + m_{r+1} \end{matrix},$$

$$\mathfrak{U}_2 \in U(m_2 + \cdots + m_{r+1}).$$

比较第二行子矩阵，知

$$(0, I, 0, \cdots, 0) = (P_{21}, P_{11}, 0, \cdots, 0) \begin{pmatrix} U_1 & \\ & \mathfrak{U}_2 \end{pmatrix},$$

必须 $P_{21}=0$. 如此继续下去，最后有

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_{r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r+1} \end{matrix}.$$

这即是使原点不变的 $SU(m_1, m_2+\cdots+m_{r+1})$ 的变换必为

$$W_{jk} = U_j^{-1} Z_{jk} U_k \quad (1 \leqslant j < k \leqslant r+1). \tag{2.2.71}$$

定理 2.2.5　$\mathfrak{D}(m_1, \cdots, m_{r+1}) \cong SU(m_1, m_2+\cdots+m_{r+1})/S(U(m_1)\times\cdots\times U(m_{r+1}))$.

第 3 章

各种积分表示

这里只考虑复流形 $\mathfrak{M}$. 在 $\mathfrak{M}$ 上适合某一组微分方程的,并适合某些条件的解能用一个核的积分表示出来,叫做*积分表示*. 例如 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathbb{C}^m$ 中的有界域,方程是 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial f(Z)}{\partial \bar{z}^{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, m,$$

要求在 $\mathfrak{M}$ 中绝对平方可积的解能用 Bergman 核的积分表示出来;又如要求 $f(z)$ 在 $\mathfrak{M}$ 的闭包连续,边界 $\partial\mathfrak{M}$ 适合某些条件时,则解能用 Cauchy 积分表示;如 $\mathfrak{M}$ 是对称典型域,则 $\mathfrak{M}$ 中的调和函数在特微流形上给定连续的边界条件可以用 Poisson 核的积分表示;如流形 $\mathfrak{M}$ 的 Green 函数存在,则 $\Delta\varphi = f$ 的解 φ 可用 f 乘 Green 函数在 $\mathfrak{M}$ 上的积分表示;又如 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathbb{C}^m$ 中有界的强拟凸域或某些拟凸域,则 $\bar{\partial}$-方程

$$\bar{\partial}\varphi = f, \text{ 其中 } \bar{\partial} f = 0,$$

的解 φ 可用 f 乘某种核的积分表示出来.

当然,并非任与复流形中任意方程的解皆有积分表示,如果有,微分方程解称之为*解析解*,以区别于其他解的存在性证明. 事实上,自50年代初从华罗庚教授创始,以及后来他的学生、学生的学生们做了大量的积分表示的研究,主要是构造了典型域的 Bergman 核、Cauchy-Szegö 核、热核、Green 核、$\bar{\partial}$-方程解的积分表示等. 本章结合具体例子,对积分表示进行稍为一般的讨论.

§ 3.1　Green 函数与 Cauchy 公式

设 $\mathfrak{M}$ 是 m 维 Kähler 流形,其 Kähler 度量对可容许坐标 $z=$

$(z^1,\cdots,z^m)$为

$$ds^2 = h_{\alpha\bar{\beta}}(z)dz^\alpha \overline{dz^\beta}. \tag{3.1.1}$$

在 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ 上的一个双 r 次 Hermite 式即

$$g_r(z,w)=\frac{1}{r!r!}g_{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_r}(z,w)dz^{\alpha_1}\wedge\cdots$$

$$\wedge\, dz^{\alpha_r}\overline{dw^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^{\beta_r}}. \tag{3.1.2}$$

注意,这里 dz^α 与 dw^β 是可交换的,即

$$dz^\alpha dw^\beta = dw^\beta dz^\alpha.$$

此外,在本章中为方便起见,用和号的省略,即

$$a_\alpha b^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha b^\alpha.$$

双 r 次 Hermite 式 $g_r(z,w)$即对 z 是$(r,0)$-式,对 w 是$(0,r)$-式,此外

$$\overline{g_r(z,w)} = g_r(w,z). \tag{3.1.3}$$

当 w 充分接近 z 时,即$(z,w)\in\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$,$\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的坐标邻域,令

$$|w-z|=[|w^1-z^1|^2+\cdots+|w^m-z^m|^2]^{1/2} \tag{3.1.4}$$

时,为充分小.

$g_r(z,w)$称为 $\mathfrak{M}$ 的 Green 式,若它适合条件:

(i)当 $m>1$时,

$$g_r(z,w)=\frac{c_r}{(m-1)|w-z|^{2m-2}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}$$

$$\times\overline{dw^{\alpha_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^{\alpha_r}}+O\left(\frac{1}{|w-z|^{2m-3}}\right),$$

其中

$$c_r=\frac{(-1)^r(m-1)!}{2^{r+1}\pi^m}, \tag{3.1.5}$$

而

$$O\left(\frac{1}{|w-z|^{2m-3}}\right)$$

表示与 $g_r(z,w)$是一样的双 r 次 Hermite 式,但是它的系数的阶

为$O(1/|w-z|^{2m-3})$；

(ii) 当$m=1$时，

$$g_r(z,w) = c_r(\log|w-z|)(\mathrm{d}z\,\overline{\mathrm{d}w})^r + O(1);$$

(iii) 当 $w\neq z$ 时，

$$\Delta_w g_r(z,w) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \mathfrak{M} \text{ 为非紧的;} \\ ch_r(z,w)\ (c \text{ 为常数}), & \text{当 } \mathfrak{M} \text{ 为紧的.} \end{cases}$$

其中

$$\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}. \tag{3.1.6}$$

这里所用的符号 d 与 δ 的定义在《微分几何学及其在物理学中的应用》(陆启铿著)一书的§1.6中可见到. Δ_w 表示 Δ 对 $g_r(z,w)$的变数 w 的作用. 当 $\mathfrak{M}$ 是紧的时，据 Hodge 定理(例如见文献[14])，$(r,0)$-式的调和式 φ,即适合方程

$$\Delta\varphi = 0$$

的$(r,0)$-式，最多有限个是线性独立的，设其为

$$\varphi_1,\cdots,\varphi_{b_r}.$$

我们可作一线性组合之后使之正交归一化，即不妨假定

$$\int_{z\in\mathfrak{M}}\varphi_j(z)\wedge *\overline{\varphi_k(z)} = \delta_{jk},\ j,k=1,\cdots,b_r, \tag{3.1.7}$$

而 $h_r(z,w)$定义为

$$h_r(z,w) = \sum_{j=1}^{b_r}\varphi_j(z)\,\overline{\varphi_j(w)}. \tag{3.1.8}$$

为什么当 $\mathfrak{M}$ 为紧时如此定义，而不是按通常的定义(即取 $c=0$)

$$\Delta g_r(x,y) = 0$$

呢?首先，这是受文献[14]中的启发，其次从函数论的角度看，根据黎曼的一个定理:紧致黎曼流形上的调和函数必为常数. 而求常数的积分表示并没有多大意义，虽然适合 $\Delta g_r=0$的 Green 式不见得不存在，例如黎曼球(或一维复投影空间)$\mathfrak{F}(1,1)$已知有 Green 函数

$$g_0(z,w) = c_0\log\left|\frac{z-w}{1+\bar{z}w}\right| \quad (c_0 \text{ 为常数})$$

适合 $\Delta g_0=0$. 但是根据 Liouville 定理，在黎曼球上全纯的函数必为常数，而求常数的 Cauchy 公式也没有什么意义. 但若考虑 $\bar\partial$方程

$$\bar\partial f = f_0$$

的解，这里 f_0是黎曼球上不恒为0的可微分(0,1)-式，适合 $\bar\partial f_0=0$，则 f 必非常数，并且

$$\Delta f = \bar\partial^* \bar\partial f = \bar\partial^* f_0,$$

$\bar\partial^* f_0$必与黎曼球上的调和函数正交，即

$$\int_{\mathfrak{F}(1,1)} \bar\partial^* f_0 * 1 = 0.$$

由于黎曼球上的调和函数只有常数，故调和核

$$h_0(z,w) = 1/V_0.$$

这里 V_0是 $\mathfrak{F}(1,1)$的体积. 按(ii)，我们的 Green 函数 $g_0(z,w)$应适合

$$\Delta_w g_0(z,w) = c.$$

它应该是(见下节)

$$g_0(z,w) = - c_0 \log \frac{|z-w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} + c_1,$$

并且此解有积分表示：

$$f(z) = \int_{\mathfrak{D}} \overline{\partial_w^*} f_0(w) \wedge *_w g_0(z,w).$$

问题是如何从 $\Delta f=\bar\partial^* f_0$的解 f 得到$\bar\partial f=f_0$的解，并用积分表示出来，这就是本章研究的问题之一.

$\mathfrak{M}$ 上任一(r,s)-式，也是 $\mathfrak{M}$ 作为黎曼流形的 $r+s$ 次外微分式，不过有实部和虚部. 因此对偶运算 $*$ 同样能作用于(r,s)-式，即分别作用于实部和虚部. 此外，由于

$$\mathrm{d} = \partial + \bar\partial, \tag{3.1.9}$$

定义

$$\partial^* = - * \bar\partial *, \quad \overline{\partial^*} = - * \partial *, \tag{3.1.10}$$

则可证明(见附录)

$$\delta = - * \mathrm{d} * = \partial^* + \overline{\partial^*}. \tag{3.1.11}$$

当 $\mathfrak{M}$ 是 Kähler 流形时,在文献[29]中证明了(见附录)

$$\partial\overline{\partial^*} + \overline{\partial^*}\partial = \bar{\partial}\partial^* + \partial^*\bar{\partial} = 0 \tag{3.1.12}$$

及

$$\partial\partial^* + \partial^*\partial = \overline{\partial\partial^*} + \overline{\partial^*\partial}. \tag{3.1.13}$$

因此

$$\Delta = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial). \tag{3.1.14}$$

今后我们仅讨论 Kähler 流形,我们重新定义 Δ 为

$$\Delta = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \tag{3.1.15}$$

以代替(3.1.14),即(3.1.15)定义的 Δ 是(3.1.14)定义的 $\frac{1}{2}\Delta$. 此外,本书在一些情况下所述的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 是(3.1.14)定义的 $\frac{1}{4}$,因此读者要注意,我们所用的调和算子,实际上可能相差一个 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$ 因子.

设 $\mathfrak{D}$ 为 Kähler 流形 $\mathfrak{M}$ 的相对紧域,即 $\mathfrak{M}$ 中一个连通的开集,它的闭包 $\overline{\mathfrak{D}}$ 是紧的. 在 $\mathfrak{D}$ 中可微分的 $(r,0)$-式

$$\varphi = \frac{1}{r!}\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(z)\mathrm{d}z^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{\alpha_r} \tag{3.1.16}$$

(其中 $z=(z^1,\cdots,z^m)$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的坐标邻域与 $\mathfrak{D}$ 相交是非空时的局部坐标)称为在 $\mathfrak{D}$ 全纯,若有

$$\bar{\partial}\varphi = 0, \tag{3.1.17}$$

φ 称为在 $\mathfrak{D}$ 的闭包 $\overline{\mathfrak{D}}$ 全纯,即有 $\mathfrak{M}$ 的开集包含 $\overline{\mathfrak{D}}$ 而 φ 在开集全纯. 根据定义,$\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}(z)$ 作为一张量场的分量,看作是对局部坐标 z^α 的函数时,在相应的局部坐标邻域与 $\mathfrak{D}$ 的交是全纯函数.

设 $g_r(z,w)$ 是 $(r,0)$ 式的 Green 式,即可写为(3.1.5)式的 Green 式,我们在这里不证明 Green 式的存在性,除非能把它具体构造出来. 我们假定 Green 式 $g_r(z,w)$ 存在(见文献[14]),当 $\mathfrak{M}$ 为非紧时,但 $\mathfrak{M}$ 有边界 $\partial\mathfrak{M}$,当 $\mathfrak{M}\cup\partial\mathfrak{M}$ 为紧的,则最少在 $r=0$ 时,$g_r(z,w)$ 存在(见文献[2]).

本节及下一节的内容曾发表在1987年的《数学季刊》上(见文献[45])(但该刊刊登前未经作者校对印稿,以致错误颇多,甚至有漏行,故该文的内容以本节所写的为准).

定理3.1.1　设 $g_r(z,w)$ 是 Kähler 流形 $\mathfrak{M}$ 的 $(r,0)$-式的 Green 式，$\mathfrak{D}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的相对紧域，并且边界 $\partial\mathfrak{D}$ 是光滑的可定向的，则任一在 $\overline{\mathfrak{D}}$ 全纯的 $(r,0)$-式 φ 在任一点 $z\in\mathfrak{D}$ 有

$$\int_{w\in\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}g_r(z,w)$$

$$=\begin{cases}\varphi(z)，\text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为非紧的；}\\ \varphi(z)+(-1)^r c\int_{\mathfrak{D}}\varphi(w)*_w h_r(z,w)，\\ \qquad\text{当 }\mathfrak{M}\text{ 是紧的.}\end{cases}$$

证　我们只证 $m\geqslant2$ 的情形，因为 $m=1$ 的证明方法是同样的，只是更简单而已.

首先证明当 $w\neq z$ 时，

$$d_w[\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)]$$
$$=\begin{cases}0，&\text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为非紧的；}\\(-1)^r\varphi(w)*_w h_r(z,w)，&\text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为紧的.}\end{cases}\tag{3.1.18}$$

实际上，根据定义 $*_w g_r(z,w)$ 对 w 是 $(n-r,n)$-式，故

$$\overline{\partial}_w *_w g_r(z,w)=0.$$

由于 $\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)$ 是对 w 的 $(m-r,m-1)$ 式，

$$\partial_w[\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)]=0.$$

因此

$$\begin{aligned}&d_w[\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)]\\&=\overline{\partial_w}[\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)]\\&=(-1)^r\varphi(w)\wedge\overline{\partial}_w\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)\\&=(-1)^r\varphi(w)\wedge(\overline{\partial}_w\overline{\partial_w^*}+\overline{\partial_w^*}\,\overline{\partial}_w)*_w g_r(z,w)\\&=(-1)^r\varphi(w)\wedge\Delta_w *_w g_r(z,w)\\&=(-1)^r\varphi(w)\wedge *_w\Delta_w g_r(z,w)\quad(z\neq w)，\end{aligned}\tag{3.1.19}$$

因为 $*\Delta=\Delta*$（见附录(3.13)式）.

现令 z 固定，取 $B_\varepsilon(z)$ 为以 z 为中心，半径 ε 充分小的球，这里所说的球是指在坐标邻域中的欧氏球，即 $|w-z|<\varepsilon$，ε 充分小，使 w 落在同一坐标邻域中.

应用 Stokes 公式及(3.1.19)知

$$\int_{w\in\partial(\mathfrak{D}-B_\varepsilon)}\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)$$
$$=\int_{\mathfrak{D}-B_\varepsilon}\mathrm{d}_w[\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)]$$
$$=\int_{\mathfrak{D}-B_\varepsilon}(-1)^r\varphi(w)\wedge *_w\Delta_w g_r(z,w)$$
$$+\int_{\mathfrak{D}-B_\varepsilon}\bar\partial\varphi(w)\wedge *_u\Delta_w g_r(z,w),$$

此即

$$\int_{w\in\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)$$
$$=\int_{w\in\partial B_\varepsilon(z)}\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)$$
$$+\int_{w\in\mathfrak{D}-B_\varepsilon(z)}(-1)^r\varphi(w)\wedge *_w\Delta_w g_r(z,w)$$
$$+\int_{w\in\mathfrak{D}-B_\varepsilon(z)}\bar\partial\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w).\tag{3.1.20}$$

根据 Green 式所要求的条件(ii)及 $\bar\partial\varphi=0$，有

$$\int_{w\in\mathfrak{D}-B_\varepsilon(z)}(-1)^r\varphi(w)\wedge *_w\Delta_w g_r(z,w)$$
$$=\begin{cases}0, & \text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为非紧的；}\\ (-1)^r c\displaystyle\int_{w\in\mathfrak{D}-B_\varepsilon(z)}\varphi(w)\wedge *_w h_r(z,w), & \\ \qquad\text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为紧的.}\end{cases}\tag{3.1.21}$$

不论 $\mathfrak{M}$ 为紧或非紧的，这个积分对 z 是连续的，因此当 $\varepsilon\to0$时，有

$$\int_{w\in\mathfrak{D}}(-1)^r\varphi(w)\wedge *_w\Delta_w g_r(z,w)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{w\in\mathfrak{D}-B_\varepsilon(z)}(-1)^r\varphi(w)\wedge *_w\Delta_w g_r(z,w)$$
$$=\begin{cases}0, & \text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为非紧的；}\\ (-1)^r c\displaystyle\int_{w\in\mathfrak{D}}\varphi(w)\wedge *_w h_r(z,w), & \\ \qquad\text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为紧的.}\end{cases}\tag{3.1.22}$$

设

$$\varphi(w)=\frac{1}{r!}\varphi_{\alpha_1,\cdots,\alpha_r}(w)\mathrm{d}w^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}w^{\alpha_r},$$

而令

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{r!}\varphi_{\alpha_1,\cdots,\alpha_r}(z)\mathrm{d}w^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}w^{\alpha_r},$$

则当 $w\in B_\varepsilon(z)$，而 ε 为充分小的正数时，

$$\varphi(w)-\varphi(z)=O(|w-z|),$$

式中 $O(|w-z|)$ 表示系数是 $O(|w-z|)$ 的 $(r,0)$-式. 根据 Green 函数的条件(i)，知

$$\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)=O\left(\frac{1}{|w-z|^{2m-1}}\right),$$

因此有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{w\in\partial B_\varepsilon(z)}[\varphi(w)-\varphi_0(z)]\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)=0. \tag{3.1.23}$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_{w\in\partial B_\varepsilon(z)}\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)\\&=\int_{w\in\partial B_\varepsilon(z)}[\varphi(w)-\varphi_0(z)]\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w)\\&\quad+\int_{w\in\partial B_\varepsilon(z)}\varphi_0(z)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_r(z,w).\end{aligned}\tag{3.1.24}$$

现在剩下计算末尾的积分在 $\varepsilon\to0$ 的极限. 我们可选取局部坐标，使得

$$h_{\alpha\bar\beta}(z)=\delta_{\alpha\beta},$$

而当 w 充分接近 z 时，

$$h_{\alpha\bar\beta}(w)=\delta_{\alpha\beta}+O(|w-z|).$$

由于 $\mathfrak{M}$ 是 Kähler 流形，我们还可选取此局部坐标，使得

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(z)=0,\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(w)=O(|w-z|). \tag{3.1.25}$$

因此当 ε 充分小时，算子 $*$、$\overline{\partial^*}$ 等作用于一外微分式，如果略去高

阶的$|w-z|$项,则可以看作这些算子同在欧氏空间的一样,根据条件(i)及附录中(1.22)式,有

$$*_{w}g_r(z,w)=\frac{i^m c_r dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}}{2^{m-r}(m-r)!m!r!(m-1)|w-z|^{2m-2}}\times\delta^{1\cdots m}_{\tau_1\cdots\tau_m}\delta^{1\cdots\cdots m}_{\alpha_1\cdots\alpha_r\sigma_1\cdots\sigma_{m-r}}dw^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dw^{\sigma_{m-r}}\wedge\overline{dw^{\tau_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^{\tau_m}}+O\left(\frac{1}{|w-z|^{2m-3}}\right).$$

由附录(2.13),知

$$\overline{\partial_w^*}*_{w}g_r(z,w)=\frac{2(-1)^{m-r+1}i^m c_r(\overline{w^\lambda}-\overline{z^\lambda})}{2^{m-r}(m-1)!(m-r)!r!|w-z|^{2m}}\times\delta^{1\cdots\cdots\cdots m}_{\alpha_1\cdots\alpha_r\sigma_1\cdots\sigma_{m-r}}\delta^{1\cdots\cdots m}_{\lambda\tau_1\cdots\tau_{m-1}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\cdot dw^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dw^{\sigma_{m-r}}\wedge\overline{dw^{\tau_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^{\tau_{m-1}}}+O\left(\frac{1}{|w-z|^{2m-2}}\right).$$

当w限制在$\partial B_\varepsilon(z)$,即$|w-z|=\varepsilon$时,

$$dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m\wedge\overline{dw^1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{dw^\lambda}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^m}=i(-2i)^{m-1}(-1)^{m+\lambda-1}\frac{w^\lambda-z^\lambda}{\varepsilon}\varepsilon^{2m-1}\omega_1,\quad(3.1.26)$$

其中ω_1是$2m-1$维单位球面的体积元素,故

$$\begin{aligned}&\varphi_0(z)\wedge\overline{\partial_w^*}*_{w}g_r(z,w)\\&=(-1)^r 2^r c_r\varphi(z)\frac{1}{|w-z|^{2m}}\sum_{\lambda=1}^{m}|w^\lambda-z^\lambda|^2\times\varepsilon^{2m-2}\omega_1+O(\varepsilon)\\&=\frac{(m-1)!}{2\pi^m}\varphi(z)\omega_1+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

由此得出

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{w\in\partial B_\varepsilon(z)}\varphi_0(z)\wedge\overline{\partial_w^*}*_{w}g_r(z,w)=\varphi(z),\quad(3.1.27)$$

因为

$$\int_{\partial B_1(0)}\omega_1 = \frac{2\pi^m}{(m-1)!}.$$

以(3.1.22)及(3.1.27)代入(3.1.20)的 $\varepsilon\to 0$ 时的情形,便得定理. ▌

特别当 $r=0$ 时,$g_0(z,w)$ 是 Green 函数,此时由附录中的(1.22)与(2.13)式易知:当边界 $\partial\mathfrak{D}$ 除了一个较低维的点集外落在 $\mathfrak{M}$ 的一个坐标邻域 $\mathfrak{B}$ 中,此坐标邻域的局部坐标为 $w=(w^1,\cdots,w^m)$,则在 $\partial\mathfrak{D}\cap\mathfrak{B}$ 中,可写为

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial_w^*} *_w g_0(z,w)\\
&= 2\left(\frac{i}{2}\right)^m \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m+\lambda-1} h(w) h^{\bar\lambda\mu}(w)\frac{\partial g_0(z,w)}{\partial w^\mu}\\
&\quad\times dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m\wedge\overline{dw^1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{dw^\lambda}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^m}.
\end{aligned}\tag{3.1.28}$$

由于一个在 $\partial\mathfrak{D}$ 连续的函数在 $\partial\mathfrak{D}$ 上作积分,除去一个 $\partial\mathfrak{D}$ 中较低维的点集外,并不影响此积分的值,因此有以下定理:

定理3.1.2　设 $\mathfrak{M}$ 是 m 维 Kähler 流形,它除去一个最高为实$2m-2$维点集之外,可以用一个坐标邻域 $\mathfrak{B}$ 盖过.若 $\mathfrak{D}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的相对紧域,其边界 $\partial\mathfrak{D}$ 是光滑的可定向的,$\varphi(z)$是在 $\overline{\mathfrak{D}}$ 全纯的函数,$g_0(z,w)$是此 Kähler 流形的 Green 函数,当 $z\in\mathfrak{D}$ 时,有 Cauchy 公式

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = {}& 2\left(\frac{i}{2}\right)^m\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^m(-1)^{m+\lambda-1}h(w)h^{\bar\lambda\mu}(w)\\
&\times\frac{\partial g_0(z,w)}{\partial w^\lambda}dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m\wedge\overline{dw^1}\wedge\cdots\\
&\wedge\widehat{\overline{dw^\lambda}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^m}+\varphi_0(z),
\end{aligned}$$

其中 $\varphi_0(z)=\begin{cases}0, & \text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为非紧的;}\\ c\int_{\mathfrak{D}}\varphi(w)h_0(z,w) *_w 1 = \dfrac{c}{V_0}\int_{\mathfrak{D}}\varphi(w) *_w 1, V_0 \text{ 为}\\ \mathfrak{M}\text{ 的体积,} & \text{当 }\mathfrak{M}\text{ 为紧的.}\end{cases}$

《典》著中及本书前两章中所考虑的 Kähler 流形 $\mathfrak{M}$,都是最

多除了一个复 $m-1$维解析集以外,可以用一个坐标邻域盖过.因此,如果 Green 函数 $g_0(z,w)$能构造出来,则构造了一种 Cauchy 公式.特别是当 $\mathfrak{D}$ 是 C^m 中一个有界域,可以把它看作是其闭包包含于任一 Kähler 流形 $\mathfrak{M}$ 一个坐标邻域之中,而根据定理3.1.2,只要 Green 函数 $g_0(z,w)$存在,便有一种 Cauchy 公式.所以 C^n 中一个有界域,可以存在无穷多的 Cauchy 公式.然而一个变数的 Cauchy 公式是非常具体的,所以除非把 $g_0(z,w)$具体构造出来,否则没有多大意思.下节就是一些在 Kähler 流形上构造其 Green 函数的具体例子.由于到目前为止,大多数 C^n 有界域的具体的 Cauchy 公式皆可由文献[34]中的 Cauchy-Fantappié 公式推得(参阅文献[39]及[59]),而 Cauchy-Fantappié 公式的证明主要用文献[6]中的 Cauchy 公式,后者是用 C^m 中的 Green 函数得出的.在下节有例子说明,球 B^m 与复投影空间 $\mathfrak{F}(1,m)$的 Green 函数亦可具体写出来,用这些 Green 函数构造的 Cauchy 公式,就不见得能从 Cauchy-Fantappié 公式推导出来了.

§3.2 Green 函数的一些具体例子

在本节只考虑 Kähler 流形 $\mathfrak{M}=C^m$,$B^m=\mathfrak{R}_I(1,m)$或者 $P^m=\mathfrak{F}(1,m)$的情形,即 $\mathfrak{M}$ 是复 m 维欧氏空间,单位球或复投影空间的情形.它们皆是秩为1的对称空间.而秩为1的对称空间的 Green 函数都可归结为求一个二阶常微分方程的 Green 函数,(见 Helgason 的书中 ch. X),但未具体求出其 Green 函数,因为这要具体知道此等对称空间的任一点的测地坐标是什么形式,亦即要知道此等空间任两点的测地距离.对于一些秩为1的实对称空间,Green 函数已求得(见文献[12]),在《典》著中,已知道 $\mathfrak{M}=B^m$ 或 P^m 时,任两点 w 与 z 的测地距离,等于把 w 点变为原点,把 z 点变为

$$z_0=(\sqrt{\chi},0,\cdots,0),\quad \chi=\chi(z,w)\geqslant 0$$

点的测地距离

$$r(z,w)=r(z_0,0)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\chi(z,w)^{\frac{1}{2}}}{1-\chi(z,w)^{\frac{1}{2}}}, \text{当 } \mathfrak{M}=\mathrm{B}^m;\\[2ex] \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{1+i\chi(z,w)^{\frac{1}{2}}}{1-i\chi(z,w)^{\frac{1}{2}}}, \text{当 } \mathfrak{M}=\mathrm{P}^m.\end{cases} \qquad (3.2.1)$$

由于我们所用的度量是不变度量，所以测地距离是不变的，即

$$r(\sigma(z),\sigma(w))=r(z,w), \quad \sigma\in IS(\mathfrak{M}).$$

$IS(\mathfrak{M})$是 $\mathfrak{M}$ 的等度变换群，因此 $\chi(z,w)$也是在 $IS(\mathfrak{M})$下不变的，由于

$$\chi(z_0,0)=z_0z_0^{\dagger},$$

而把 w 与 z 分别映为0与 z_0的 $IS(\mathfrak{M})$的变换具体知道，设其为

$$s=f(t;z,w), \qquad (3.2.2)$$

适合 $$0=f(w;z,w), \quad z_0=f(z;z,w). \qquad (3.2.3)$$

因此 $$\chi(z,w)=f(z;z,w)f(z;z,w)^{\dagger}. \qquad (3.2.4)$$

我们把 $f(z;z,w)$的具体形式代入，便得到：

当 $\mathfrak{M}=\mathrm{B}^m$ 时，

$$\chi(z,w)=1-\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-zw^{\dagger}|^2}$$

$$=\frac{(1-|w|^2)|w-z|^2+|(w-z)w^{\dagger}|^2}{|1-zw^{\dagger}|^2}; \qquad (3.2.5)$$

当 $\mathfrak{M}=\mathrm{P}^m$ 时①，

$$\chi(z,w)=1-\frac{|1+zw^{\dagger}|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

$$=\frac{|w-z|^2+\sum\limits_{\alpha<\beta}|z^{\alpha}w^{\beta}-w^{\alpha}z^{\beta}|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}; \qquad (3.2.6)$$

当 $\mathfrak{M}=\mathrm{R}^m$ 时，习知欧氏空间的测地距离为

$$r(z,w)=|z-w|. \qquad (3.2.7)$$

---

① 严格地说，在此情形，(3.2.1)的 χ 应为(3.2.6)定义的 χ 的函数，即 $\chi/(1-\chi)$.

如 $g_0(z,w)$ 为 $\mathfrak{M}$ 的 Green 函数，由于 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta = 2h^{\lambda\mu}(z)\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^\lambda\partial z^\mu}$$

是(3.1.14)定义的算子，这在 $IS(\mathfrak{M})$ 下不变，因为 ds^2 在 $IS(\mathfrak{M})$ 下不变，$g_0(z,w)$ 也应为不变的，即

$$g_0(\sigma(z),\sigma(w)) = g_0(z,w), \quad \sigma \in IS(\mathfrak{M}). \quad (3.2.8)$$

当选取 σ 为适合条件(3.2.3)的变换(3.2.2)时，

$$g_0(z,w) = g_0(z_0,0).$$

根据(3.2.4)知，$g_0(z,w)$ 是 $\chi(z,w)$ 的函数，即

$$g_0(z,w) = \psi(\chi(z,w)). \quad (3.2.9)$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta g_0(z,w) &= 2h^{\lambda\mu}(z)\frac{\partial^2\psi(\chi(z,\varepsilon))}{\partial z^\mu\partial\bar{z}^\lambda}\\ &= 2\left[h^{\lambda\mu}\frac{\partial\chi}{\partial z^\mu}\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}^\lambda}\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + h^{\lambda\mu}\frac{\partial^2\chi}{\partial\bar{z}^\lambda\partial z^\mu}\frac{d\psi}{d\chi}\right]\\ &= \text{常数} \quad (\text{当 } z \neq w). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

这是 ψ 的二阶常微分方程，我们找出如此形式的解：

$$\psi = \frac{c_r}{[\chi(z,w)]^{m-1}} + \chi(z,w)\text{ 的低阶项},$$

便得出 Green 函数(3.2.9).

(i) 当 $\mathfrak{M}=\mathbb{C}^m$ 时，

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^1\partial\bar{z}^1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z^m\partial\bar{z}^m}.$$

Green 函数熟知为

$$g_0(z,w) = \begin{cases}\dfrac{c_0}{(m-1)|w-z|^{2m-2}}, & \text{当 } m > 1 \text{ 时;}\\ c_0\log|w-z|, & \text{当 } m = 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

以之代入定理3.1.2，便有

$$\varphi(z) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\lambda-1}\frac{\overline{w^\lambda}-\overline{z^\lambda}}{|w-z|^{2m}}$$

$$\times dw^1 \wedge \cdots \wedge dw^m \wedge \overline{dw^1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{dw^\lambda}} \wedge \cdots \wedge \overline{dw^m}. \tag{3.2.11}$$

这就是 Bochner 或称 Bochner-Martinelli（见文献[6]及[56]）的 Cauchy 公式，不过 Bochner 隐含了是从欧氏空间的 Green 函数角度来建立此公式的.

(ii) 当 $\mathfrak{M}=\mathrm{B}^m$ 时，

此时 $\chi(z,w)$ 由(3.2.5)定义，故

$$\frac{\partial \chi}{\partial z^\lambda} = \frac{1-|w|^2}{|1-zw^\dagger|^2}\left(\bar{z}^\lambda - \frac{1-|z|^2}{1-zw^\dagger}\overline{w}^\lambda\right),$$

因此有

$$h^{\lambda\mu}(z)\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}^\lambda}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z^\mu} = (1-|z|^2)(\delta_{\lambda\mu} - \overline{z^\lambda} z^\mu)\cdot\frac{(1-|w|^2)^2}{|1-zw^\dagger|^4}$$

$$\times\left(z^\lambda - \frac{1-|z|^3}{1-wz^\dagger}w^\lambda\right)\left(\bar{z}^\mu - \frac{1-|z|^2}{1-zw^\dagger}\overline{w^\mu}\right)$$

$$= \chi(1-\chi)^2,$$

$$h^{\lambda\mu}(z)\frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z}^\lambda \partial z^\mu} = (1-\chi)(m-\chi),$$

故(3.2.10)为

$$\chi(1-\chi)^2\frac{d^2 g_0}{d\chi^2} + (1-\chi)(m-\chi)\frac{dg_0}{d\chi}$$

$$= \chi(1-\chi)^2\left[\frac{d}{d\chi}\left(\log\frac{dg_0}{d\chi}\right) + \frac{m-\chi}{\chi(1-\chi)}\right]\frac{dg_0}{d\chi} = 0.$$

由此得到

$$\frac{dg_0}{d\chi} = c_0\frac{(1-\chi)^{m-1}}{\chi^m}, \tag{3.2.12}$$

故有解

$$g_0(z,w) = c_0\left[\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{m+k-1}\frac{(m-1)!}{k!(m-k-1)!}\frac{1}{k\chi(z,w)^k}\right.$$

$$\left.+(-1)^{m-1}\log\chi(z,w)\right] + c_1, \tag{3.2.13}$$

其中 c_0 与 c_1 为积分常数. 我们取

$$c_0 = \frac{(m-1)!}{2\pi^m}, \tag{3.2.14}$$

则 $g_0(z,w)$ 便是 B^m 的 Green 函数. 若我们取

$$c_1 = -c_0 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m+k-1} \frac{(m-1)!}{k!(m-k+1)!} \cdot \frac{1}{k}, \tag{3.2.15}$$

则当 z 或 w 是边界点时, 即 $|z|=1$ 或 $|w|=1$ 时, 则由(3.2.5)知

$$\chi(z,w) = 1, \text{当 } z \text{ 或 } w \in \partial\mathrm{B}^m \text{ 时}, \tag{3.2.16}$$

故 $g_0(z,w)$ 在 B^m 的边界为0, 即

$$g_0(z,w) = 0, \text{当 } z \text{ 或 } w \in \partial\mathrm{B}^m \text{ 时}. \tag{3.2.17}$$

此外, 由于

$$h^{\lambda\mu}(z)\frac{\partial\chi(z,w)}{\partial z^\mu} = \frac{1-\chi(z,w)}{1-zw^\dagger}(\overline{z^\lambda} - \overline{w^\lambda})(1-|z|^2),$$

$$h(z) = \frac{1}{(1-|z|^2)^{m+1}},$$

根据定理3.1.2知, 当 $\mathfrak{D}$ 是 B^m 中相对紧域, $\varphi(z)$ 在 $\overline{\mathfrak{D}}$ 全纯时, 有

$$\begin{aligned}\varphi(z) = {} & \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \\ & \times \int_{\partial\mathfrak{D}} \varphi(w) \frac{(1-|z|^2)^m}{[(1-|w|^2)|w-z|^2 + |(w-z)w^\dagger|^2]^m} \\ & \times \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{\lambda-1} \frac{\overline{w^\lambda} - \overline{z^\lambda}}{1-zw^\dagger} \mathrm{d}w^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w^m \wedge \overline{\mathrm{d}w^1} \wedge \cdots \\ & \wedge \widehat{\overline{\mathrm{d}w^\lambda}} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}w^m}.\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

作映照 $z \mapsto \dfrac{z}{R}$ (R 为正数), 则当 $\mathfrak{D}$ 为半径是 R 的球 $\mathrm{B}^m(R)$ 的相对紧域时, Cauchy 公式(3.2.18)为

$$\begin{aligned}\varphi(z) = {} & \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \\ & \times \int_{w\in\partial\mathfrak{D}} \varphi(w) \frac{(R^2-|w|^2)^m}{[(R^2-|w|^2)|w-z|^2 + |(w-z)w^\dagger|^2]^m}\end{aligned}$$

$$\times \sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\lambda-1}\frac{R^2(\overline{w^\lambda}-\overline{z^\lambda})}{R^2-wz^\dagger}dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m\wedge\overline{dw^1}\wedge\cdots$$

$$\wedge\widehat{\overline{dw^\lambda}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^m}.\tag{3.2.19}$$

取 $R\to\infty$，即得到 Bochner-Martinelli 的 Cauchy 公式(3.2.11)，即 Bochner-Martinelli 的 Cauchy 公式可以由球的 Cauchy 公式推出来.

其次，我们取 $\mathfrak{D}=B^m(R_1)$，$0<R_1<R$ 时，(3.2.19)为

$$\varphi(z)=\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}$$

$$\times\int_{|w|=R_1}\varphi(w)\frac{(R^2-|w|^2)^m}{[(R^2-|w|^2)|w-z|^2+|(w-z)w^\dagger|^2]^m}$$

$$\times\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\lambda-1}\frac{R^2(\overline{w^\lambda}-\overline{z^\lambda})}{R^2-wz^\dagger}dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m\wedge\overline{dw^1}\wedge\cdots$$

$$\wedge\widehat{\overline{dw^\lambda}}\wedge\cdots\wedge dw^m,$$

或者

$$\varphi(R_1z)=\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}$$

$$\times\int_{|w|=1}\varphi(R_1w)\frac{R_1^{2m}\left(\frac{R^2}{R_1^2}-|w|^2\right)^m}{\left[\left(\frac{R^2}{R_1^2}-|w|^2\right)|w-z|^2+|(w-z)w^\dagger|^2\right]^m}$$

$$\times\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\lambda-1}\frac{\frac{R^2}{R_1^2}(\overline{w^\lambda}-\overline{z^\lambda})}{\frac{R^2}{R_1^2}-wz^\dagger}dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m\wedge\overline{dw^1}\wedge\cdots$$

$$\wedge\widehat{\overline{dw^\lambda}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^m}.\tag{3.2.20}$$

由于在单位球边界 ∂B^n 上，故

$$dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m\wedge\overline{dw^1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{dw^\lambda}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw^m}$$
$$=i(-2i)^{m-1}(-1)^{m+\lambda-1}w^\lambda\omega_1(w),\tag{3.2.21}$$

其中 ω_1 为 ∂B^n 的体积元素. 我们取

$$R=1,\quad R_1\to 1,$$

(3.2.20)化为

$$\varphi(z)=\frac{(m-1)!}{2\pi^m}\int_{|w|=1}\varphi(w)\frac{(1-|w|^2)^m}{|1-zw^\dagger|^{2m}}\omega_1(w).\tag{3.2.22}$$

此即球 B^m 的 Poisson 公式,即 Poisson 公式亦可由球 B^m 的 Cauchy 公式推出来.

(iii) 当 $\mathfrak{M}=P^m$ 时,

此时 $\chi(z,w)$由(3.2.6)定义.

由于 P^m 除了 m 个复 $m-1$维平面外,可由标准邻域 $\mathfrak{V}(1)$盖过,使得 $\mathfrak{V}(1)$与 C^m 恒同,则此 m 个复平面的点称为 C^m 的无穷远点. 如 $\mathfrak{D}$ 是 P^m 中的相对紧域,则其光滑边界 $\partial\mathfrak{D}$ 是实$2n-1$维,它在"无穷远"的点最多是$2m-2$维,因此对在 $\partial\mathfrak{D}$ 上连续函数的积分,考虑其在 $\partial\mathfrak{D}\cap\mathfrak{V}(1)$的积分是一样的. P^m 在 $\mathfrak{V}(1)$中的度量

$$\begin{aligned}ds^2&=\operatorname{tr}[(1+zz^\dagger)^{-1}dz(I+z^\dagger z)^{-1}dz^\dagger]\\&=h_{\lambda\bar{\mu}}dz^\lambda\overline{dz^\mu},\end{aligned}$$

故

$$h^{\bar{\lambda}\mu}(z)=(1+|z|^2)(\delta_{\lambda\mu}+\overline{z^\lambda}z^\mu),$$

$$h(z)=\frac{1}{(1+|z|^2)^{m+1}}.$$

由计算可知

$$\frac{\partial\chi}{\partial z^\lambda}=\frac{-(1+wz^\dagger)\overline{w^\lambda}}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}+\frac{|1+wz^\dagger|^2\overline{z^\lambda}}{(1+|w|^2)(1+|z|^2)^2},\tag{3.2.23}$$

$$h^{\bar{\mu}\lambda}(z)\frac{\partial\chi}{\partial z^\lambda}=\frac{1+wz^\dagger}{1+|w|^2}(\overline{z^\mu}-\overline{w^\mu}),$$

因此

$$h^{\bar{\mu}\lambda}(z)\frac{\partial\chi}{\partial z^\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}^\mu}=\chi(1-\chi),$$

$$h^{\bar{\mu}\lambda}(z)\frac{\partial^2\chi}{\partial z^\lambda\partial\bar{z}^\mu}=m(1-\chi)-\chi.$$

当取

$$g_0(z,w)=c_0\left[\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k\chi(z,w)^k}-\log\chi(z,w)\right]+c_1,\tag{3.2.24}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}\chi}=-c_0\frac{1-\chi^m}{\chi^m(1-\chi)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2g_0}{\mathrm{d}\chi^2}=-c_0\frac{\chi(1-\chi^m)-m(1-\chi)}{\chi^{m+1}(1-\chi)^2}.$$

而

$$\begin{aligned}\Delta g_0=&-2c_0\left\{\chi(1-\chi)\frac{\chi(1-\chi^m)-m(1-\chi)}{\chi^{m+1}(1-\chi)^2}\right.\\&\left.+[m(1-\chi)-\chi]\frac{1-\chi^m}{\chi^m(1-\chi)}\right\}\\=&\,2c_0m=ch_0(z,w),\end{aligned}$$

其中

$$c=2mc_0V_m,$$

$$V_m=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\dot{z}}{(1+|z|^2)^{m+1}}=\frac{\pi^m}{(m-1)!m!}.\tag{3.2.25}$$

因为 P^m 中0次调和式只有常数，故

$$h_0(z,w)=\frac{1}{V_m}.$$

这里 V_m 是 P^m 的体积. 至于(3.2.24)中的常数 c_1，取之为

$$c_1=-c_0\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k},$$

即当 $\chi(z,w)=1$时，亦即当

$$1+zw^{\dagger}=0\tag{3.2.26}$$

时，$g_0(z,w)=0$，适合(3.2.26)的两点 z 与 w 称为“正交”，因为对 P^m 的齐次坐标 $\mathfrak{z}$ 与 $\mathfrak{w}$ 而言，(3.2.26)式即为

$$\mathfrak{z}\mathfrak{w}^{\dagger}=0.$$

由于

$$\overline{\partial_w^*} *_w g_0(z,w)$$

$$= 2\left(\frac{i}{2}\right)^m \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m+\lambda-1} h(w) h^{\lambda\mu}(w)$$

$$\times \frac{\partial\chi}{\partial w^\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}\chi} \mathrm{d}w^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w^m \wedge \overline{\mathrm{d}w^1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\mathrm{d}w^\lambda}} \wedge \cdots$$

$$\wedge \overline{\mathrm{d}w^m}$$

$$= \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{\lambda-1} \frac{1}{(1+|w|^2)^{m+1}} \cdot \frac{1+zw^\dagger}{1+|z|^2} (\overline{w^\lambda} - \overline{z^\lambda})$$

$$\times \frac{1-\chi^m}{\chi^m(1-\chi)} \mathrm{d}w^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w^m \wedge \overline{\mathrm{d}w^1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\mathrm{d}w^\lambda}} \wedge \cdots$$

$$\wedge \overline{\mathrm{d}w^m}$$

$$= \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \frac{(1+|z|^2)^m \sum_{j=1}^m \chi(z,w)^{j-1}}{\left[|w-z|^2 + \sum_{\alpha<\beta} |w^\alpha z^\beta - z^\beta w^\alpha|^2\right]^m}$$

$$\times \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{\lambda-1} \frac{1+zw^\dagger}{1+|w|^2} (\overline{w^\lambda} - \overline{z^\lambda})$$

$$\times \mathrm{d}w^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w^m \wedge \overline{\mathrm{d}w^1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\mathrm{d}w^\lambda}} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}w^m}. \tag{3.2.27}$$

为了方便起见,令

$$[\overline{\mathrm{d}w^\lambda}] = \mathrm{d}w^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w^\lambda \wedge \overline{\mathrm{d}w^1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\mathrm{d}w^\lambda}} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}w^m}, \tag{3.2.28}$$

于是有

$$\bar{\partial} \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m+\lambda-1} h(w) h^{\lambda\mu}(w) \frac{\partial \log h(w)}{\partial w^\mu} [\overline{\mathrm{d}w^\lambda}]$$

$$= -m(m+1)\left\{h^{-1}(w) \frac{\partial}{\partial \overline{w^\lambda}}\left[h(w) h^{\lambda\mu}(w) \frac{\partial \log(1+|w|^2)}{\partial w^\mu}\right]\right\}$$

$$\times h(w) \mathrm{d}w^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w^m \wedge \overline{\mathrm{d}w^1} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}w^m}$$

$$= -m(m+1)\left(\frac{i}{2}\right)^{-m} h^{\lambda\mu}(w) \frac{\partial^2 \log(1+|w|^2)}{\partial w^\mu \partial \overline{w^\lambda}} *_w 1,$$

$$= -m^2(m+1)\left(\frac{i}{2}\right)^{-m} *_w 1.$$

即有

$$*_w 1 = \frac{1}{m^2}\left(\frac{1}{2i}\right)^m \bar{\partial}\sum_{\lambda=1}^m (-1)^{\lambda-1}\frac{\overline{w^\lambda}}{(1+|w|^2)^m}[\overline{dw^\lambda}]. \tag{3.2.29}$$

故

$$\begin{aligned}
&c\int_{\mathfrak{D}}\varphi(w) *_w 1\\
&= \frac{c}{m^2}\left(\frac{1}{2i}\right)^m \int_{\mathfrak{D}} d\left\{\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^m(-1)^{\lambda-1}\frac{\overline{w^\lambda}[\overline{dw^\lambda}]}{(1+|w|^2)^m}\right\}\\
&= \frac{2V_m c_0}{m}\left(\frac{1}{2i}\right)^m\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^m(-1)^{\lambda-1}\frac{\overline{w^\lambda}}{(1+|w|^2)^m}[\overline{dw^\lambda}]\\
&= \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}V_m\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^m(-1)^{\lambda-1}\frac{\overline{w^\lambda}}{(1+|w|^2)^m}[\overline{dw^\lambda}].
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

当 $\mathfrak{D}$ 为相对紧域时，由于 P^m 是除去 m 个复 $m-1$维平面外，可由一个坐标邻域 $\mathfrak{V}(1)$盖过，应用定理3.1.2及(3.2.7)与(3.2.30)，有

Cauchy 公式

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = &\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^m(-1)^{\lambda-1}\frac{1}{(1+|w|^2)^m}\\
&\times\left\{\frac{(1+|z|^2)^m(1+|w|^2)^m\sum_{\alpha=1}^m\chi(z,w)^{\alpha-1}}{\left[|w-z|^2+\sum_{\alpha<\beta}|w^\alpha z^\beta - z^\alpha w^\beta|^2\right]^m}\right.\\
&\left.\times\frac{1+zw^\dagger}{1+|w|^2}(\overline{w^\lambda}-\overline{z^\lambda}) - V_m\overline{w^\lambda}\right\}[\overline{dw^\lambda}].
\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

如果 $\varphi(w)$适合条件

$$\int_{\mathfrak{D}}\varphi(w) *_w 1 = 0, \tag{3.2.32}$$

或者

$$\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\lambda-1}\frac{\overline{w^{\lambda}}}{(1+|w|^{2})}[\overline{dw^{\lambda}}]=0, \quad (3.2.33)$$

则 Cauchy 公式可写为

$$\varphi(z)=\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^{m}}\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\lambda-1}$$

$$\times\frac{(1+|z|^{2})^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\chi(z,w)^{\alpha-1}}{[|w-z|^{2}+\sum_{\alpha<\beta}|w^{\alpha}z^{\beta}-z^{\alpha}w^{\beta}|^{2}]^{m}}\frac{1+zw^{\dagger}}{1+|w|^{2}}$$

$$\times(\overline{w^{\lambda}}-\overline{z^{\lambda}})[\overline{dw^{\lambda}}]. \quad (3.2.34)$$

如果

$$c_{\varphi}=\int_{\mathfrak{D}}\varphi(w)*_{w}1\neq 0,$$

则对于函数

$$\psi(w)=\varphi(w)-c_{\varphi}/v(\mathfrak{D})$$

(其中 $v(\mathfrak{D})$是 $\mathfrak{D}$ 在 P^{m} 的体积)必适合

$$\int_{\mathfrak{D}}\psi(w)*_{w}1=0.$$

换言之,总有 Cauchy 公式

$$\varphi(z)-\frac{c_{\varphi}}{v(\mathfrak{D})}=\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^{m}}\int_{\partial\mathfrak{D}}\left[\varphi(w)-\frac{c_{\varphi}}{v(\mathfrak{D})}\right]$$

$$\times\frac{(1+|z|^{2})^{m}\left[\sum_{\alpha=1}^{m}\chi(z,w)^{\alpha-1}\right](1+zw^{\dagger})}{\left[|z-w|^{2}+\sum_{\alpha<\beta}|z^{\alpha}w^{\beta}-w^{\alpha}z^{\beta}|^{2}\right]^{m}(1+|w|^{2})}$$

$$\times\sum(-1)^{\lambda-1}(\overline{w^{\lambda}}-\overline{z^{\lambda}})[\overline{dw^{\lambda}}]. \quad (3.2.35)$$

例如在上一章考虑的域 $\mathfrak{D}_{1}(1,1,1)$,把它看作是 P^{2}中的域,则上面的 Cauchy 公式成立,但是我们已知在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数$\varphi(z^{1},z^{2})$与 z^{1}、z^{2}无关. 这样不如考虑

$$\bar{\partial}\varphi=\varphi_{0}(z)$$

的解的积分表示,其中

$$\varphi_0(z) = \varphi_1(z)\,\overline{dz^1} + \varphi_2(z)\,\overline{dz^2}$$

是 $\mathfrak{D}$ 中的(0,1)-式.

§ 3.3　Cauchy-Fantappiè 公式与 $\bar{\partial}$-方程解的积分表示

设 $\mathfrak{D}$ 是 C^m 中一有界域,其边界 $\partial\mathfrak{D}$ 是逐段光滑的. 这里所谓"逐段光滑"是指 $\partial\mathfrak{D}$ 最多除了低于$2m-1$维的 R^{2m}的子流形 M_1, $M_2,\cdots,M_r$ 外,即 $\partial\mathfrak{D}-(M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_r)$是$2m-1$维微分流形. 当一个$2m-1$次连续的外微分式在 $\partial\mathfrak{D}$ 积分时等于在 $\partial\mathfrak{D}-(M_1\cup\cdots\cup M_r)$的积分.

Cauchy-Fantappiè 公式实际上是 Leray(见文献[34])所建立的. 他考虑了 $C^m\times P^m$ 中的复$2m-1$维超曲面 Q 由方程

$$\mathfrak{z}\xi' = \xi_0 + z^\alpha\xi_\alpha = 0 \tag{3.3.1}$$

定义,其中 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_m)$是 P^m 中$[\xi]$点的齐次坐标 $z=(z^1,\cdots,z^m)\in C^m$,命 $\mathfrak{z}=(1,z)$. 取 $\mathfrak{D}$ 域中的一固定点$[\mathfrak{w}]\in\mathfrak{D}$,不妨设 $\mathfrak{w}=(1,w)$,即$[\mathfrak{w}]\in\mathfrak{V}_0\cong C^m$,$w\in C^m$. 令 $P=P_w$ 是由方程

$$\mathfrak{w}\xi' = \xi_0 + w^\alpha\xi_\alpha = 0 \quad (z^\alpha\text{ 任意}) \tag{3.3.2}$$

定义的 $C^m\times P^m$ 中的$2m-1$维复超平面,因为 w^α 是固定的.

设 $f(z)$是在 C^m 的有界域 $\mathfrak{D}$ 的闭包 $\overline{\mathfrak{D}}$ 全纯的函数(这完全为了证明的方便,可以设 f 在 $\mathfrak{D}$ 全纯,在 $\overline{\mathfrak{D}}$ 连续,此时 Cauchy-Fantappiè 公式亦成立),即 f 在包含 $\overline{\mathfrak{D}}$ 的一个开集中全纯.

取

$$\xi_0 = \overset{0}{\xi}_0 = \frac{(\overline{z^\alpha}-\overline{w^\alpha})z^\alpha}{|w-z|^2},$$

$$\xi_\alpha = \overset{0}{\xi}_\alpha = -(\overline{z^\alpha}-\overline{w^\alpha})/|z-w|^2, \tag{3.3.3}$$

则当 $z\neq w$ 时,定义了一个映照

$$\overset{0}{\varphi}_w : C^m - w \longrightarrow Q - Q\cap P$$

定义为

$$\overset{0}{\varphi}_w(z) = (z,[\overset{0}{\xi}]) \in Q - Q\cap P. \tag{3.3.4}$$

因为显然有

$$\mathfrak{z}\overset{0}{\xi}' = \overset{0}{\xi}_0 + z^\alpha \overset{0}{\xi}_\alpha = 0, \quad \mathfrak{w}\overset{0}{\xi}' = \overset{0}{\xi}_0 + w^\alpha \overset{0}{\xi}_\alpha = 1. \tag{3.3.5}$$

$\overset{0}{\varphi}_w(z) \in Q - Q \cap P$，$\overset{0}{\varphi}_w$ 称为 Bochner-Martinelli 映照.

令

$$c_0 = \overset{0}{\varphi}_w(\partial\mathfrak{D}) \tag{3.3.6}$$

及

$$\omega(\xi) = dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^m,$$

$$\omega_1(\xi) = \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{\lambda-1} \xi_\lambda d\xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\xi}_\lambda \wedge \cdots \wedge d\xi_m$$

$$= \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{\lambda-1} \xi_\lambda d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_{\lambda-1} \wedge d\xi_{\lambda+1} \wedge \cdots \wedge d\xi_m. \tag{3.3.7}$$

不难证明 $Q - Q \cap P$ 是 $C^m \times P^m$ 中的复$2m-1$维子流形，

$$\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)/(\xi_0 + w^\lambda \xi_\alpha)^m = \frac{\omega_1(\xi/\xi_0) \wedge \omega(Z)}{[1 + w^\alpha \xi_\alpha/\xi_0]^m}$$

是 $C^m \times P^m$ 中$(2m-1,0)$-式，把它限制在 $Q - Q \cap P$ 中时，有

$$d\left[\frac{\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)}{(\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha)^m}\right] = \frac{m d \frac{\xi_1}{\xi_0} \wedge \cdots \wedge d \frac{\xi_m}{\xi_0} \wedge dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^m}{(1 + w^\alpha \xi_\alpha/\xi_0)^m}$$

$$= 0, \tag{3.3.8}$$

因为在一个复$2m-1$维流形中，$(2m,0)$-式必为0.

令 c 为在 $Q - Q \cap P$ 中同调于 c_0的循环，即有 $Q - Q \cap P$ 的$2m$维链 e，使得

$$c - c_0 = \partial e. \tag{3.3.9}$$

Leray[34]证明了以下定理：

定理3.3.1(Cauchy-Fantappiè 公式) 设 $f(z)$在 $\mathfrak{D}$ 全纯，如 c 是在 $Q - Q \cap P$ 中与 c_0同调的任一$2m-1$维循环，则有

$$f(z) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \int_c \frac{f(z)\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)}{[\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha]^m}.$$

证 根据 Stokes 定理，有

$$\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \int_c \frac{f(z)\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)}{[\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha]^m}$$

$$= \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{c_0}\frac{f(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[1+z^\alpha\xi_\alpha]^m}$$

$$+\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_e \mathrm{d}\frac{f(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}. \tag{3.3.10}$$

由于 $f(z)$在 $\overline{\mathfrak{D}}$ 全纯,$\omega(z)=\mathrm{d}z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^m$,

$$\int_e \mathrm{d}\frac{f(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}=\int_e\frac{\bar\partial f(z)\wedge\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}$$

$$+\int_e f(z)\mathrm{d}\left[\frac{\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}\right]=0, \tag{3.3.11}$$

此外,由(3.3.5)知

$$\int_{c_0}\frac{f(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{(\xi_0+w^0\xi_\alpha)^m}$$

$$=\int_{\partial\mathfrak{D}}\frac{f(z)\omega_1(\overset{0}{\xi})\wedge\omega(z)}{(\overset{0}{\xi}_0+w^\alpha\overset{0}{\xi}_\alpha)^m}$$

$$=\int_{\partial\mathfrak{D}}f(\xi)\omega_1(\overset{0}{\xi})\wedge\omega(z)$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\int_{\partial\mathfrak{D}}f(z)\delta^{1\cdots\cdots m}_{\lambda\lambda_1\cdots\lambda_{m-1}}\overset{0}{\xi}_\lambda \mathrm{d}\overset{0}{\xi}_{\lambda 1}$$

$$\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\overset{0}{\xi}_{\lambda_{m-1}}\wedge\omega(z)$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\int_{\partial\mathfrak{D}}f(z)\delta^{1\cdots\cdots m}_{\lambda\lambda_1\cdots\lambda_{m-1}}\frac{\overline{z^\lambda}-\overline{w^\lambda}}{|z-w|^2}$$

$$\times\left[\frac{\overline{\mathrm{d}z_{\lambda_1}}}{|z-w|^2}-\frac{\overset{0}{\xi}_{\lambda_1}\mathrm{d}|z-w|^2}{|z-w|^2}\right]$$

$$\wedge\cdots\wedge\left[\frac{\overline{\mathrm{d}z_{\lambda_{m-1}}}}{|z-w|^2}-\frac{\overset{0}{\xi}_{\lambda_{m-1}}\mathrm{d}|z-w|^2}{|z-w|^2}\right]\wedge\omega(z)$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\int_{\partial\mathfrak{D}}\frac{f(z)}{|z-w|^{2m}}\delta^{1\cdots\cdots m}_{\lambda\lambda_1\cdots\lambda_m}(z^\lambda-\overline{w^\lambda})\,\overline{\mathrm{d}z^{\lambda_1}}$$

$$\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\lambda_{m-1}}}\wedge\omega(z)$$

$$= \frac{(2\pi i)^m}{(m-1)!} f(w). \tag{3.3.12}$$

这里利用了

$$\delta^{1\cdots m}_{\lambda\lambda_1\cdots\lambda_m} \overset{0}{\xi}_\lambda \overset{0}{\xi}_{\lambda_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, m-1,$$

及 Bochner-Martinelli 的 Cauchy 公式(3.2.11). 以(3.3.11)和(3.3.12)代入(3.3.10)即得定理. ▌

注意:这里在边界上的积分实际上是

$$\int_{\partial\mathfrak{D}-M_1-\cdots-M_r} f(z)\omega_1\left(\frac{z-w}{|z-w|^2}\right) \wedge \omega(z),$$

其中 $\omega_1\left(\frac{z-w}{|z-w|^2}\right) \wedge \omega(z)$是$2m-1$次式,而 $M_j(j=1,\cdots,r)$是小于$2m-1$维的 C^m 的微分子流形,因此

$$\omega_1\left(\frac{z-w}{|z-w|^2}\right) \wedge \omega(z)|_{M_j} = 0 \quad (j=1,\cdots,m),$$

故

$$\int_{M_j} f(z)\omega_1\left(\frac{z-w}{|z-w|^2}\right) \wedge \omega(z) = 0.$$

在 $\partial\mathfrak{D}$ 的积分定义为

$$\int_{\partial\mathfrak{D}} = \int_{\partial\mathfrak{D}-M_1-\cdots-M_j} + \sum_{j=1}^r \int_{M_j}.$$

现在假定 $\bar\partial\varphi\neq 0$,而是

$$\bar\partial\varphi = f, \tag{3.3.13}$$

f 是在 $\bar{\mathfrak{D}}$ 的一个邻域中可微分的(0,1)-式,并适合

$$\bar\partial f = 0. \tag{3.3.14}$$

在定理3.1.1的证明中,(3.1.20)式现在只假定 φ 是可微分的,而 $\Delta_w g_0(w,z)=0$当 $w\in\mathfrak{D}-B_\varepsilon(z)$. 取 $\varepsilon\to 0$,有

$$\varphi(z) = \int_{w\in\partial\mathfrak{D}} \varphi(w) \wedge \overline{\partial_w^*} *_w g_0(z,w)$$

$$- \int_{w\in\mathfrak{D}} \bar\partial\varphi(w) \wedge \overline{\partial_w^*} *_w g_0(z,w), \tag{3.3.15}$$

其中 $g_0(z,w)$是 $\mathbf{C}^m$ 的 Green 函数,见 § 3.2中的(i).

假定域 $\mathfrak{D}$ 的 $\bar{\partial}$-方程有解 $\varphi(z)$,并且是在 $\bar{\mathfrak{D}}$ 的一邻域中可微分,那么(3.3.15)可写为

$$\varphi(z)=\int_{w\in\partial\mathfrak{D}}\varphi(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_0(z,w)$$

$$-\int_{w\in\mathfrak{D}}f(w)\wedge\overline{\partial_w^*}*_w g_0(z,w),$$

由(3.3.3)易见

$$\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(z)\overline{\partial_z^*}*_z g_0(z,w)=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m},\tag{3.3.16}$$

故(3.3.15)式化为

$$\varphi(w)=\frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{c_0}\frac{\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{(\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha)^m}$$

$$-\int_{z\in\mathfrak{D}}\bar{\partial}\varphi(z)\wedge\overline{\partial_z^*}*_z g_0(w,z).\tag{3.3.17}$$

现在假设存在一组函数

$$\overset{1}{\xi}_j=\overset{1}{\xi}_j(w,z),\quad j=0,1,\cdots,m,\tag{3.3.18}$$

当 $z\in\partial\mathfrak{D}$ 时是 w 的在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数,并适合

$$\mathfrak{z}\overset{1}{\xi}'=0,\quad 但\ \mathfrak{w}\overset{1}{\xi}'=1,\tag{3.3.19}$$

其中 $\mathfrak{z}=(1,z),\mathfrak{w}=(1,w),\overset{1}{\xi}=(\overset{1}{\xi}_0,\overset{1}{\xi}_1,\cdots,\overset{1}{\xi}_m)$.

(3.3.18)定义了一映照

$$\overset{1}{\varphi}_w:\partial\mathfrak{D}\longrightarrow Q-Q\cap P,$$

即由 $\overset{1}{\varphi}_w(z)=(z,[\overset{1}{\xi}(w,z)])$定义. $\overset{1}{\varphi}_w$ 称为全纯 Leray 映照. 令

$$c_1=\overset{1}{\varphi}_w(\partial\mathfrak{D}),\tag{3.3.20}$$

这是 $Q-Q\cap P$ 中的$2m-1$维循环. 我们断言 c_1与 c_0在$Q-Q\cap P$同调,即有 $Q-Q\cap P$ 的$2m$ 维链 e 使得

$$c_0-c_1=\partial e.\tag{3.3.21}$$

实际上,可令

$$\xi_j=(1-\lambda)\overset{0}{\xi}_j+\lambda\overset{1}{\xi}_j,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1. \tag{3.3.22}$$

这是适合

$$\mathfrak{z}\xi'=(1-\lambda)\mathfrak{z}\overset{0}{\xi'}+\lambda\mathfrak{z}\overset{1}{\xi'}=0, \tag{3.3.23}$$

$$\mathfrak{w}\xi'=(1-\lambda)\mathfrak{w}\overset{0}{\xi'}+\lambda\mathfrak{w}\overset{1}{\xi'}=1. \tag{3.3.24}$$

定义映照 $\varphi_w:\partial\mathfrak{D}\to Q-Q\cap P$ 为

$$\varphi_w(z)=(z,[\xi])\in Q-Q\cap P.$$

取 e 为

$$e=(\partial\mathfrak{D},[(1-\lambda)\overset{0}{\xi}(w,\partial\mathfrak{D})+\lambda\overset{1}{\xi}(w,\partial\mathfrak{D})]),\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1. \tag{3.3.25}$$

这是 $Q-Q\cap P$ 中 $2m$ 维链，显然

$$\partial e=c_0-c_1.$$

故 e 是存在的. 应用 Stokes 定理知

$$\int_{c_0}\frac{\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}=\int_{c_1}\frac{\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}+\int_e \mathrm{d}\,\frac{\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}. \tag{3.3.26}$$

令

$$\varphi_1(w)=\int_{c_1}\frac{\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^m}=\int_{z\in\partial\mathfrak{D}}\frac{\varphi(z)\omega_1(\overset{1}{\xi}(w,z))\wedge\omega(z)}{[\overset{1}{\xi}_0(w,z)+w^\alpha\overset{1}{\xi}_\alpha(w,z)]^m}. \tag{3.3.27}$$

根据假设，$\overset{1}{\xi}_j(z,w)$是 w 在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数，故 $\varphi_1(w)$是 w 的在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数.

另一方面，由于 $e\subset Q-Q\cap P$，有

$$\int_e \mathrm{d}\,\frac{\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_\alpha+w^\alpha\xi_\alpha]^m}$$

$$=\int_e \mathrm{d}[\varphi(z)\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)]$$

$$=\int_e \bar{\partial}\varphi(z)\wedge\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)$$

$$= \int_{(z,\lambda)\in\partial\mathfrak{D}\times[0,1]} \bar\partial\varphi(z) \wedge \omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi} + \lambda\overset{1}{\xi}) \wedge \omega(z)$$

$$= \int_{(z,\lambda)\partial\mathfrak{D}\times[0,1]} f(z) \wedge \omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi} + \lambda\overset{1}{\xi}) \wedge \omega(z). \tag{3.3.28}$$

令

$$\psi_1(w) = \varphi(w) - \varphi_1(w). \tag{3.3.29}$$

由于 $\varphi_1(w)$全纯

$$\bar\partial\psi_1 = f, \tag{3.3.30}$$

即 $\psi_1(w)$也是 $\bar\partial$-方程的解. 由(3.3.27)、(3.3.28)、(3.3.23)以及(3.3.24)知

$$\psi_1(w) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{(z,\lambda)\in\partial\mathfrak{D}\times[0,1]} f(z) \wedge \omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi} + \lambda\overset{1}{\xi}) \wedge \omega(z) - \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{z\in\mathfrak{D}} f(z) \wedge \omega_1(\overset{0}{\xi}) \wedge \omega(z).$$

而 $\bar\partial$-方程的任一解与 ψ_1相差一个在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数,反之亦然. 由(3.3.17)得到以下定理:

定理3.3.2 设 $\bar\partial$-方程

$$\bar\partial\psi = f, \quad \bar\partial f = 0$$

在有界域 $\mathfrak{D}$ 有解,而 $\partial\mathfrak{D}$ 是逐段光滑的 C^m 的$2m-1$维微分流形,若 $\partial\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 中存在全纯 Leray 映照,则 $\bar\partial$-方程任一解 ψ 可表示为

$$\psi(w) = \psi_0(w) + \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{\in\partial\mathfrak{D}\times[0,1]} f(z) \wedge \omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi} + \lambda\overset{1}{\xi}) \wedge \omega(z) - \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{z\in\mathfrak{D}} f(z) \wedge \omega_1(\overset{0}{\xi}) \wedge \omega(z),$$

其中 [0,1] 是 λ 的定义区间,由 $\overset{0}{\xi}$ 定义的 Leray 映照为 Bochner-Martinelli 映照,由 $\overset{1}{\xi}$定义的 Leray 映照为全纯 Leray 映照,$\psi_0(w)$是在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数.

注意：定理假定 $\mathfrak{D}$ 域中 $\bar{\partial}$-方程的解存在，以及存在全纯的 Leray 映照. 什么样的域 $\bar{\partial}$-方程的解存在呢?J. J. Kohn 证明了 $\mathfrak{D}$ 是拟凸域时，$\bar{\partial}$-方程的解存在，这已成为经典的结果（见文献[31]）. Henkin[26]证明了强拟凸域的全纯 Leray 映照可以构造出来，因而强拟凸域的（$\bar{\partial}$-方程解的）积分表示就得到了. 但是 Kohn 与 Nirenbery[32]举出拟凸域的一个例子，证明不存在全纯 Leray 映照. 由于我们经常讨论的四类（对称）典型域，除了球 $B^m = R_I(1, m)$ 外，皆非强拟凸域，而仅是拟凸域，那么在这类域是否存在全纯 Leray 映照呢?我们发现（见文献[49]）这四类典型域皆属于一种特殊的多项式域（定义见下节），而此种多项式域是拟凸域，并且全纯 Leray 映照可以构造出来，因而应用定理3.3.2便可得出 $\bar{\partial}$-问题的解的积分表示.

§3.4 一种多项式域的积分表示

设 $\rho(w,\bar{z})$ 是 $C^m \times C^m$ 中对变数 $\bar{z} = (\overline{z^1}, \cdots, \overline{z^m})$ 及变数 $w = (w^1, \cdots, w^m)$ 的多项式. 设开集

$$U_\rho = \{w \in C^m \mid \rho(w,\overline{w}) > 0\}$$

是非空的，$\mathfrak{D}$ 是 U_ρ 的一个连通分量，则 $\mathfrak{D}$ 称为*多项式域*，若 $\mathfrak{D}$ 是有界的，则称为*有界多项式域*. 多项式域的边界点集为

$$\partial\mathfrak{D} = \{z \in \overline{\mathfrak{D}} \mid \rho(z,\bar{z}) = 0\}.$$

一个由多项式 $\rho(w,\bar{z})$ 定义的多项式域称为*适合非零条件*，若

$$\rho(w,\bar{z}) \neq 0, \quad \text{当}(w,z) \in \mathfrak{D} \times \overline{\mathfrak{D}}. \tag{3.4.1}$$

这里只考虑有界的适合非零条件的 C^m 中的多项式域.

定理3.4.1 设 $\mathfrak{D}$ 是由多项式 $\rho(z,\overline{w})$ 定义的 C^m 中有界的适合非零条件的多项式域，即是开集

$$U_\rho = \{w \in C^m \mid \rho(w,\overline{w}) > 0\}$$

的一个连通分量 $\mathfrak{D}$，它是有界的，并且适合条件

$$\rho(w,\bar{z}) \neq 0, \quad \text{当}(w,z) \in \mathfrak{D} \times \overline{\mathfrak{D}},$$

则 $\mathfrak{D}$ 的边界点集

$$\partial\mathfrak{D} = \{z \in \overline{\mathfrak{D}} \mid \rho(z,\bar{z}) = 0\}$$

必是逐段光滑的，并且 $\mathfrak{D}$ 必定是全纯域，此外有全纯的 Leray 映照

$$\overset{1}{\varphi}: \mathfrak{D} \times \partial\mathfrak{D} \longrightarrow Q - Q \cap P$$

定义为

$$\overset{1}{\varphi}(w,z) = \overset{1}{\varphi}_w(z) = (z,[\xi]),$$

其中　$\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)$,

$$\xi_0 = -\sum_{\alpha=1}^{m} z^\alpha \overset{1}{\xi}_\alpha,$$

$$\overset{1}{\xi}_\alpha = \frac{1}{\rho(w,\bar{z})(z^\alpha - w^\alpha)}[\rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},w^\alpha,w^{\alpha+1},\cdots,w^m,\bar{z}) - \rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},z^\alpha,w^{\alpha+1},\cdots,w^m,\bar{z})].$$

证　先证定理的第二部分：

利用公式

$$s^m - r^m = (s-t)(s^{m-1} + s^{m-2}t + \cdots + t^{m-1}),$$

我们知道，任一单复变数的多项式 $P(s)$ 有

$$\frac{P(s) - P(t)}{s-t}$$

是两个变数 s 与 t 的多项式. 因此对每一 $\alpha(=1,\cdots,m)$,

$$\frac{1}{w^\alpha - z^\alpha}[\rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},w^\alpha,w^{\alpha+1},\cdots,\overline{w}^m,\bar{z}) - \rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},z^\alpha,w^{\alpha+1},\cdots,w^m,\bar{z})]$$

是变数 $z=(z^1,\cdots,z^m)$, $w=(w^1,\cdots,w^m)$ 及 $\bar{z}=(\overline{z^1},\cdots,\overline{z^m})$ 的多项式，特别是对于 $w\in C^m$ 全纯. 由定理定义的 $\xi_0=\overset{1}{\xi}_0(w,z)$ 以及 $\xi_\lambda=\overset{1}{\xi}_\lambda(w,z)$ 对 $w\in\mathfrak{D}$ 是全纯的，当 $z\in\partial\mathfrak{D}$, $\rho(z,\bar{z})=0$, 故

$$\begin{aligned}\rho(w,\bar{z}) &= \rho(w,\bar{z}) - \rho(z,\bar{z}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m}[\rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},w^\alpha,w^{\alpha+1},\cdots,w^m,\bar{z}) \\ &\quad - \rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},z^\alpha,w^{\alpha+1},\cdots,w^m,\bar{z})]\end{aligned}$$

$$= \rho(w,\bar{z})\sum_{\alpha=1}^{m}(w^{\alpha}-z^{\alpha})\overset{1}{\xi}_{\alpha}(w,z)$$

$$= \rho(w,\bar{z})(\overset{1}{\xi}_0 + w^{\alpha}\overset{1}{\xi}_{\alpha}).$$

由于 $\rho(w,\bar{z})\neq 0$,故有

$$\overset{1}{\xi}_0 + w^{\alpha}\overset{1}{\xi}_{\alpha} = 1.$$

此外,根据 $\overset{1}{\xi}_0$与 $\overset{1}{\xi}_j$ 的定义,显然有

$$\overset{1}{\xi}_0 + z^{\alpha}\overset{1}{\xi}_{\alpha} = 0.$$

换言之,$(z,[\xi])\in Q-Q\cap P_w$. 因此映照 $\overset{1}{\varphi}_w$ 是全纯 Leray 映照. 根据非零条件 $\rho(w,\bar{z})$ 当 $z\in\partial\mathfrak{D}$、$w\in\mathfrak{D}$ 时不为零,故$[\rho(w,\bar{z})]^{-1}$是 w 在 $\mathfrak{D}$ 的全纯函数,但在 $w=z$ 时为∞,因此 $\mathfrak{D}$ 是全纯域. 这必是拟凸域,故方程有解.

由于 $\mathfrak{D}$ 是非空的,是 $\rho(z,\bar{z})>0$定义的开集的一个分量,所以 $\rho(z,\bar{z})$在 $\mathfrak{D}$ 为实数,在 C^m 也必须是实数.

$$\frac{\partial\rho(z,\bar{z})}{\partial z^{\alpha}} \quad (\alpha = 1,\cdots,m)$$

不能全部恒等于0,否则,$\rho(z,\bar{z})$为常数,于是 $\mathfrak{D}$ 或者是空的,或者是整个 C^m. 但我们假定 $\mathfrak{D}$ 是有界的,因此 $\rho(z,\bar{z})=0$是$2m-1$维实解析集. 因此 $\partial\mathfrak{D}$ 中有一个 $\frac{\partial\rho(z,\bar{z})}{\partial z^{\alpha}}\neq 0$ 的点集是 $\partial\mathfrak{D}$ 中的开集,而

$$\rho(z,\bar{z}) = 0,\ \frac{\partial\rho(z,\bar{z})}{\partial z^{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = 1,\cdots,m)$$

是一个最高为$2m-2$维的实解析集 A,由解析集的理论知[①],A 能分解为

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r,$$

其中 $A_1,\cdots,A_r$ 分别为纯粹 $k_1,\cdots,k_r$ 维实解析集,其中任两个不同的 A_j 与 A_k 无公共点,即 $A_1,\cdots,A_r$ 是无公共点的实 $k_1,\cdots,k_r$ 维

① 参阅 Remmert and Stein 的文章(Math Ann, 1955, 126:263~306). 那里虽然讨论的是复解析集,但对实解析集,特别是实多项式集仍然适用.

解析流形. 这证明了 $\partial\mathfrak{D}$ 除去了解析集 $\partial\mathfrak{D}\cap A_1,\cdots,\partial\mathfrak{D}\cap A_r$ 的点集外，是$2m-1$维实解析流形的和集，因此 $\partial\mathfrak{D}$ 是逐段光滑的. 定理证毕. ▌

定理3.4.2 典型域

$R_{\mathrm{I}}(m;n)=\{z\in\mathrm{C}^{m\times n}\mid I-ZZ^{\dagger}>0\}$,

$R_{\mathrm{II}}(n)=\{Z\in\mathrm{C}^{n\times n}\mid I-ZZ^{\dagger}>0,Z=Z'\}$,

$R_{\mathrm{III}}=\{z\in\mathrm{C}^{n\times n}\mid I-ZZ^{\dagger}>0,Z=-Z'\}$,

$R_{\mathrm{IV}}(m)=\{z\in\mathrm{C}^{m}\mid 1+|zz'|^2-2zz^{\dagger}>0,1-|zz'|>0\}$,

皆是有界的适合非零条件的多项式域，因此此等典型域的 $\bar{\partial}$-方程

$$\bar{\partial}\varphi=f$$

当 f 是闭包中的可微分(0,1)-式并适合 $\bar{\partial}f=0$时有解，并且全纯 Leray 映照存在，此 $\bar{\partial}$-方程的解可用定理3.3.2的公式表示.

证 主要证明以上的典型域中任一个 $\mathfrak{D}$ 是有界的适合非零条件的多项式域，其余由定理3.4.1与3.3.2便可得到.

当 $\mathfrak{D}=R_{\mathrm{I}}$、$R_{\mathrm{II}}$或 R_{III}时，取

$$\rho(W,\bar{Z})=\det(I-WZ^{\dagger}).$$

令开集

$$U_\rho=\{Z\mid\rho(Z,\bar{Z})>0\},$$

显然典型域 $\mathfrak{D}$ 是U_ρ 的一个连通分量，在《典》著中已经证明过(见本书中引理4.2.1)

$$\rho(W,\bar{Z})=\det(I-WZ^{\dagger})\neq 0,\text{当}(W,Z)\in\mathfrak{D}\times\bar{\mathfrak{D}},$$

因此 $\mathfrak{D}$ 是适合非零条件的 .

当 $\mathfrak{D}=R_{\mathrm{IV}}(m)$，取

$$\rho(w,\bar{z})=1+ww'\overline{zz'}-2wz^{\dagger}.$$

在《典》著中讨论 R_{IV}域时，已知

$$U_\rho=\{z\in\mathrm{C}^m\mid\rho(z,\bar{z})=1+|zz'|^2-2z\bar{z}^{\dagger}>0\}$$

有两个连通的分量，其中的一个就是典型域 $R_{\mathrm{IV}}(m)$，其他的一个是无界域. 此外，在证明 $R_{\mathrm{IV}}(m)$的 Cauchy 核中，已隐含地证明了(见本书中引理4.2.6)：

$$\rho(w,\bar{z})=1+ww'\overline{zz'}-2wz^{\dagger}\neq 0,\quad\text{当}(w,z)\in R_{\mathrm{IV}}\times\overline{R_{\mathrm{IV}}}.$$

所以 $R_N(w)$是适合非零条件的多项式域.定理证毕.　▌

有界的适合非零条件的多项式域有很多,绝不止仅是典型域.例如,设

$P_j(z)(j=1,\cdots,n)$ 是 z 的多项式,不包含常数项,

$$P_j(0)=0;$$

$$\rho(w,\bar{z})=1-\sum_{j=1}^{n}P_j(w)\,\overline{P_j(z)}.$$

由于 $P_j(0)=0$,在开集 $U_\rho=\{z\in\mathbb{C}^m\mid\rho(z,\bar{z})>0\}$中包含原点的连通分量 $\mathfrak{D}$ 是非空的.它必定适合非零的条件,因为根据 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}|\rho(w,\bar{z})|&\geqslant 1-\left|\sum_{j=1}^{n}P_j(w)\,\overline{P_j(z)}\right|\\&\geqslant 1-\left[\sum_{j=1}^{n}|P_j(w)|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{j=1}^{n}|P_j(z)|^2\right]^{1/2}\\&\geqslant 1-\left[\sum_{j=1}^{n}|P_j(w)|^2\right]^{1/2}>0,\end{aligned}$$

当$(w,z)\in\mathfrak{D}\times\overline{\mathfrak{D}}$.

但 $\mathfrak{D}$ 不见得是有界的,例如当 $m=2,n=1,P_1(z)=z^1z^2$时,域 $\mathfrak{D}=\{z\in\mathbb{C}^2\mid 1-|z^1z^2|^2>0\}$就不是有界域,但是,若假设 $n\geqslant m,P_j(z)$中前 m 个为以下的形式:

$$P_j(z)=\lambda_j(z^j)^{m_j}+z^j\text{ 的高次项},$$

式中　常数 $\lambda_j\neq 0,m_j$ 为正整数$(j=1,\cdots,m)$;注意:

$\lambda_j(z^j)^{m_j}$非和号的省略.

此时 $\mathfrak{D}$ 必定是有界域.这只须用到如下事实:设

$$P(s)=a_0s^k+a_1s^{k+1}+\cdots+a_ls^{k+l}$$

是单复变数 s 的多项式,$k\geqslant 1$,则 $P(s)$不可能有界,除非 $a_0=a_1=\cdots=a_l=0$.如果 $a_0\neq 0$,则

$$|P(s)|<1$$

隐含了 s 必须有界,即$|s|<M$.

应用这一事实于 $P_j(z)(j\leqslant m)$,由于当 $z\in\mathfrak{D}$ 时,必须

$|P_j(z)|<1$，而 $\lambda_j \neq 0$. 把 $P_j(z)$ 看作是 z^j 的多项式，便知有正数 M_j，使

$$|z^j| < M_j, j = 1, \cdots, m.$$

故 $\mathfrak{D}$ 是有界域.

若取 $m=n$，

$$P_\alpha(z) = z^{k_\alpha},\ k_\alpha \text{ 为正整数 } (\alpha = 1, \cdots, m),$$

则
$$\mathfrak{D} = \{z \in \mathrm{C}^m \mid |z^1|^{2k_1} + \cdots + |z^m|^{2k_m} < 1\},$$

这是最近有较多的学者研究的域(例如见文献[80]).

若把多项式 $\rho(w, \bar{z})$ 改为 $\mathrm{C}^m \times \mathrm{C}^m$ 中对变数 w 及 $\bar{z}$ 为整函数，亦即对 w 是全纯整函数，对 $\bar{z}$ 是反全纯整函数，则定理3.4.1仍然成立，因为证明的每一步皆成立. 不过当 $\rho(w, \bar{z})$ 不是多项式时，整函数域并不常用，这里就不进一步讨论了.

§3.5 Cauchy-Szegö 核与级数展开

单复变数的 Cauchy 公式同样可以用 C^1 的 Green 函数

$$\frac{1}{2\pi}\log|z-w|^2$$

和定理3.1.1来证明. 但与多复变数($m>1$)不同的是：它对 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 的微分(相当于 $\bar{\partial}^*$)是 z 与 w 当 $z \neq w$ 时的全纯函数. 当 $m>1$时并非如此，它仅是调和函数. 从调和函数到多复变数全纯函数还有一大段差距，并不能构造它的共轭的调和函数使两者成为一全纯函数的实与虚部分. 所以单复变函数的 Cauchy 公式一身而兼有两种性能：第一，它对具有逐段光滑边界的有界域皆成立；第二，当它限制在圆盘时，它的核对 w(或者 z)是全纯的，由此可以得出全纯函数 $\varphi(w)$ 在此圆盘展开为幂级数，而对 z 的积分可得出 Cauchy 不等式，于是给出了收敛半径的估计以及幂级数展开系数的估计.

在多复变数($m>1$)，定理3.1.1的由 Green 函数得出的 Cauchy 公式中，$\overline{\partial_z^* * {}_z g_0(w,z)}$ 不是对 w 全纯的，虽然 Cauchy 公

式在任意相对紧的有逐段光滑边界的域成立. 但是另一方面一直有数学家研究 Cauchy 公式,它的核称为 Cauchy 核,对 w(或者 z)是全纯的. 我们由 Leray 建立的 Cauchy-Fantappiè 公式知道:设 C^m 的有界域 $\mathfrak{D}$ 其边界是逐段光滑的,若存在全纯的 Leray 映照,则 Cauchy 核存在,因为若

$$\overset{1}{\xi}_j = \overset{1}{\xi}_j(w,z) \quad (\text{当 } z \in \partial\mathfrak{D})$$

是 $w \in \mathfrak{D}$ 的全纯函数,适合

$$\overset{1}{\xi}_0 + z^\alpha \overset{1}{\xi}_\alpha = 0\ ,\ \overset{1}{\xi}_0 + w^\alpha \overset{1}{\xi}_\alpha \neq 0.$$

则 Cauchy-Fantappiè 公式

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{c_1} \frac{\varphi(z)\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)}{[\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha]^m} \\ &= \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m}\int_{z\in\partial\mathfrak{D}} \frac{\varphi(z)\omega_1(\overset{1}{\xi}(w,z)) \wedge \omega(z)}{[\overset{1}{\xi}_0(w,z) + w^\alpha \overset{1}{\xi}_\alpha(w,z)]^m} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{z\in\partial\mathfrak{D}} \varphi(z) S(w,z) \dot{z},\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

其中 $\dot{z}$ 乃是 $\partial\mathfrak{D}$ 的由 C^m 诱导的体积元素. Cauchy 核 $S(w,z)$是对 $w\in\mathfrak{D}$的全纯函数.

实际上,$\partial\mathfrak{D}$ 上的积分只对 $\partial\mathfrak{D}$ 中 C^m 的$2m-1$维光滑子流形积分. 如 z_0是 $\partial\mathfrak{D}$ 中的$2m-1$维的光滑部分的点,则必有邻域 $\mathfrak{U}(z_0)$ 使得 $\partial\mathfrak{D}\cap\mathfrak{U}(z_0)$中的点可表示为

$$z^\alpha = z^\alpha(t^1,\cdots,t^{2m-1}), \tag{3.5.2}$$

其中 $t^1,\cdots,t^{2m-1}$为实参数,函数矩阵

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial z^m}{\partial t^1} & \frac{\partial \overline{z^1}}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial \overline{z^m}}{\partial t^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z^1}{\partial t^{2m-1}} & \cdots & \frac{\partial z^m}{\partial t^{2m-1}} & \frac{\partial \overline{z^1}}{\partial t^{2m-1}} & \cdots & \frac{\partial \overline{z^m}}{\partial t^{2m-1}} \end{pmatrix} \tag{3.5.3}$$

的秩为$2m-1$. 于是

$$(m-1)!(-1)^m\omega_1(\overset{1}{\xi}(w,z)) \wedge \omega(z)$$

$$= (m-1)!(-1)^m \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{\lambda-1} \overset{1}{\xi}_\lambda \mathrm{d}\overset{1}{\xi}_1 \wedge \cdots$$

$$\wedge \mathrm{d}\overset{1}{\xi}_{\lambda+1} \wedge \mathrm{d}\overset{1}{\xi}_{\lambda+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\overset{1}{\xi}_m \wedge \omega(z)$$

$$= (m-1)! \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{m+\lambda-1} \overset{1}{\xi}_\lambda \frac{\partial \overset{1}{\xi}_1}{\partial \bar{z}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \overset{1}{\xi}_{\lambda-1}}{\partial \bar{z}^{\alpha_{\lambda-1}}}$$

$$\times \frac{\partial \overset{1}{\xi}_{\lambda+1}}{\partial \bar{z}^{\alpha_\lambda}} \cdots \frac{\partial \overset{1}{\xi}_m}{\partial \bar{z}^{\alpha_{m-1}}} \overline{\mathrm{d}z}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}z}^{\alpha_{m-1}} \wedge \omega(z)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{m} \overset{1}{\xi}_\lambda \frac{\partial \overset{1}{\xi}_1}{\partial \bar{z}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \overset{1}{\xi}_{\lambda-1}}{\partial \bar{z}^{\alpha_\lambda}} \frac{\partial \overset{1}{\xi}_{\lambda+1}}{\partial \bar{z}^{\alpha_\lambda}} \cdots \frac{\partial \overset{1}{\xi}_m}{\partial \bar{z}^{\alpha_{m-1}}} \delta^{1\cdots m}_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}}$$

$$\times (-1)^m \omega(z) \wedge \overline{\mathrm{d}z^1} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}z}^{\mu-1} \wedge \overline{\mathrm{d}z}^{\mu+1} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}z^m}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{m} \overset{1}{\xi}_\lambda \frac{\partial \overset{1}{\xi}_1}{\partial \bar{z}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \overset{1}{\xi}_{\lambda-1}}{\partial \bar{z}^{\alpha_{\lambda-1}}} \cdot \frac{\partial \overset{1}{\xi}_{\lambda+1}}{\partial \bar{z}^{\alpha_\lambda}} \cdots \frac{\partial \overset{1}{\xi}_m}{\partial \bar{z}^{\alpha_{m-1}}} \delta^{1\cdots m}_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}} \overline{\alpha^\mu}(z)\mathrm{d}v, \tag{3.5.4}$$

其中

$$\overline{\alpha^\mu}(z) = (-1)^m \frac{\det \dfrac{\partial(z^1,\cdots,z^m,\overline{z^1},\cdots,\bar{z}^{\mu-1},\bar{z}^{\mu+1},\cdots,\bar{z}^m)}{\partial(t^1,\cdots\cdots\cdots\cdots,t^{2m-1})}}{\sqrt{\det\left[\dfrac{\partial z}{\partial t}\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)^\dagger\right]}} \tag{3.5.5}$$

称为 $\partial\mathfrak{D}$ 上 z 点的复方向余弦,

$$\mathrm{d}v = \sqrt{\det\left[\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^\dagger\right]}\mathrm{d}t^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t^{2m-1} \tag{3.5.6}$$

是 $\partial\mathfrak{D}$ 的体积元素,因此

$$(m-1)!(-1)^m \omega_1(\overset{1}{\xi}(z,w)) \wedge \omega(z)$$
$$= \overset{1}{\xi}_\lambda(w,z) c^\lambda(w,z)\mathrm{d}v, \tag{3.5.7}$$

其中

$$c^{\lambda}(w,z)=\det\begin{pmatrix}\alpha^1(z) & \alpha^2(z) & \cdots & \alpha^m(z)\\ \frac{\partial\overset{1}{\xi}_1}{\partial\bar z^1} & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_1}{\partial\bar z^2} & \cdots & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_1}{\partial\bar z^m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\lambda-1}}{\partial\bar z^1} & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\lambda-1}}{\partial\bar z^2} & \cdots & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\lambda-1}}{\partial\bar z^m}\\ \frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\lambda+1}}{\partial\bar z^1} & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\lambda+1}}{\partial\bar z^2} & \cdots & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\lambda+1}}{\partial\bar z^m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\overset{1}{\xi}_m}{\partial\bar z^1} & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_m}{\partial\bar z^2} & \cdots & \frac{\partial\overset{1}{\xi}_m}{\partial\bar z^m}\end{pmatrix}, \qquad (3.5.8)$$

对 w 是全纯的. 令

$$S(w,z)=\overset{1}{\xi}_{\lambda}(w,z)c^{\lambda}(w,z), \qquad (3.5.9)$$

便得(3.5.1)式.

定理3.5.1 设 $\mathfrak{D}$ 是 C^m 中的有界域,其边界 $\partial\mathfrak{D}$ 是逐段光滑的. 若在 $\mathfrak{D}\times\partial\mathfrak{D}$ 存在全纯的 Leray 映照,则有 Cauchy 核 $S(w,z)$,对 $w\in\mathfrak{D}$ 是全纯的,对 $z\in\partial\mathfrak{D}$ 是连续的,使得任一在 $\mathfrak{D}$ 全纯、在 $\overline{\mathfrak{D}}$ 连续的函数 $\varphi(z)$ 有

$$\varphi(w)=\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{\partial\mathfrak{D}}\varphi(z)S(w,z)\dot z,$$

其中 $\dot z$ 是 $\partial\mathfrak{D}$ 上$2m-1$维子流形中由 C^m 诱导的体积元素.

例如,适合非零条件的有界域多项式域 $\mathfrak{D}$,便有定理4.1.1的 Cauchy 核 $S(w,z)$,虽对 w 是全纯的,对$z\in\partial\mathfrak{D}$是连续的,但对 $z\in\mathfrak{R}$不见得是反全纯的.

设 $\mathfrak{R}$ 是 C^m 中的有界域,其边界 $\partial\mathfrak{R}$ 的一"最小"闭子集 $\mathfrak{C}$ 称为 $\mathfrak{R}$ 的 Silov 边界,若任一在 $\mathfrak{R}$ 全纯,在 $\overline{\mathfrak{R}}$ 连续的函数 $f(z)$,必有

$$\max_{z\in\overline{\mathfrak{R}}}|f(z)|=\max_{z\in\mathfrak{C}}|f(z)|;$$

所谓"最小",即:在任一点 $u\in\mathfrak{C}$,必有一函数 $f(z)$在 $\mathfrak{R}$ 内全纯,在

$\mathfrak{R}$ 连续，使得 $z\in\mathfrak{R}-\mathfrak{C}$ 时，

$$|f(z)| < |f(u)|.$$

若 $\partial\mathfrak{R}$ 是逐段光滑的，即 $\partial\mathfrak{R}$ 是互不相交的子集 $M, M_1, \cdots, M_s$ 的和集，其中每一个皆是可定向的 C^m 中的可微分子流形，其维数分别是 $2m-1>r_1>\cdots>r_s>0$，并且 $M_{r_s}=\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的 Silov 边界，则 $\mathfrak{C}$ 称为 $\mathfrak{R}$ 的特征流形.

如果 C^m 的有界域 $\mathfrak{R}$ 有特征流形 $\mathfrak{C}$，并且存在一函数 $S(w,\bar{z})$ 适合：

(i) $S(w,\bar{z})$ 是在 $(w,\bar{z})\in\overline{\mathfrak{R}}\times\overline{\mathfrak{R}}$ 连续，当 $(w,z)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ 时对 w 是全纯的，对 z 是反全纯的，并且

$$\overline{S(w,\bar{z})} = S(z,\bar{w});$$

(ii) 在 $\mathfrak{R}$ 全纯，在 $\overline{\mathfrak{R}}$ 连续的函数类 $A(\overline{\mathfrak{R}})$ 中任一函数 $\varphi(w)$ 有 Cauchy 公式

$$\varphi(w) = \int_{\mathfrak{C}} \varphi(u) S(w,\bar{u}) \dot{u}, \tag{3.5.10}$$

则 $S(w,\bar{z})$ 称为 $\mathfrak{R}$ 域的特征流形 $\mathfrak{C}$ 的 Cauchy-Szegö 核.

华罗庚[23] 最初构造（对称）典型域 $\mathfrak{R}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}$ 的 Cauchy-Szegö 核是先构造 $A(\overline{\mathfrak{R}})$ 的一个在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系 $\{\varphi_\nu(w)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$，使得

$$S(w,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(w)\,\overline{\varphi_\nu(z)}, \tag{3.5.11}$$

在 $w\in\mathfrak{R}$ 任一紧子集，$z\in\overline{\mathfrak{R}}$ 时绝对并一致收敛，并且对任一 $\varphi\in A(\overline{\mathfrak{R}})$，Cauchy 公式(3.5.10)成立. $S(w,\bar{z})$ 自然是 Cauchy-Szegö 核. 但后来由于典型域调和函数论的发展（见文献[25]），Poisson 核可以从典型域的自同构群 Aut($\mathfrak{R}$)得出来，而 Cauchy-Szegö 核又可以从 Poisson 核得出（参阅《典》著 § 5.3之末）. 现在反过来问：如果有界域 $\mathfrak{R}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}$ 的 Cauchy-Szegö 核存在，能否选取 $A(\overline{\mathfrak{R}})$ 的在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系，使得(3.5.11)成立？作者[35] 在1956年曾用 Bergman 核函数构造在 $\mathfrak{D}$ 内全纯且绝对值平方积的函数类的一个完备正交就范函数系 $\{\varphi_\nu(z)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$. 现在仍用此

法从$S(w,\bar{z})$构造$\mathfrak{C}$上的正交就范函数系，使(3.5.11)成立.

定理3.5.2 设$\mathfrak{R}$是有特征流形$\mathfrak{C}$的C^m中的有界域. 若$\mathfrak{R}$域的特征流形的Cauchy-Szegö核$S(w,\bar{z})$存在，则在$A(\mathfrak{R})$中存在$\mathfrak{C}$上正交就范函数系$\{\varphi_\nu(w)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$，使得级数

$$S_1(w,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(w)\overline{\varphi_\nu(z)}$$

在$(w,z)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$的任一紧子集中绝对且一致收敛，并且

$$S_1(w,\bar{z}) = S(w,\bar{z}).$$

证 对任一$f\in A(\mathfrak{R})$，根据假设有

$$f(w) = \int_{\mathfrak{C}} f(u)S(w,\bar{u})\dot{u}, \quad 当\ w\in\mathfrak{R}.$$

由此知，若z是$\mathfrak{R}$中的一个固定点，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n f(z)}{(\partial z^1)^{n_1}\cdots(\partial z^m)^{n_m}} &= \int_{\mathfrak{C}} f(u)\frac{\partial^n S(z,\bar{u})}{(\partial z^1)^{n_1}\cdots(\partial z^m)^{n_m}}\dot{u}\\ &= \int_{\mathfrak{C}} f(u)\frac{\overline{\partial^n S(u,\bar{z})}}{(\partial \bar{z}^1)^{n_1}\cdots(\partial \bar{z}^m)^{n_m}}\dot{u},\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

其中$n=n_1+\cdots+n_m$. 由于对固定的z，$S(w,\bar{z})$属于$A(\mathfrak{R})$，我们把$f(w)$换为$S(w,\bar{z})$，有

$$\frac{\partial^n S(z,\bar{z})}{(\partial z^1)^{n_1}\cdots(\partial z^m)^{n_m}} = \int_{\mathfrak{C}} S(u,\bar{z})\frac{\overline{\partial^n S(u,\bar{z})}}{(\partial \bar{z}^1)^{n_1}\cdots(\partial \bar{z}^m)^{n_m}}\dot{u}. \tag{3.5.13}$$

再对上式微分，得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{n+p} S(z,\bar{z})}{(\partial z^1)^{n_1}\cdots(\partial z^m)^{n_m}(\partial \bar{z}^m)^{p_1}\cdots(\partial \bar{z}^m)^{p_m}}\\ &= \int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial^p S(u,\bar{z})}{(\partial \bar{z}^1)^{p_1}\cdots(\partial \bar{z}^m)^{p_m}}\frac{\overline{\partial^n S(u,\bar{z})}}{(\partial \bar{z}^1)^{n_1}\cdots(\partial \bar{z}^m)^{n_m}}\dot{u}.\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

令

$$\psi_{n_1\cdots n_m}(w) = \frac{\partial^n S(w,\bar{z})}{(\partial \bar{z}^1)^{n_1}\cdots(\partial \bar{z}^m)^{n_m}}. \tag{3.5.15}$$

我们把指标组$(n_1,\cdots,n_m)$排列成单一的次序. 以$(p_1,\cdots,p_m)\subset(n_1,\cdots,n_m)$表示把指标组$(p_1,\cdots,p_m)$放在$(n_1,\cdots,n_m)$的前面.

(i) 如 $p_1+\cdots+p_m<n_1+\cdots+n_m$，则

$$(p_1,\cdots,p_m)\subset(n_1,\cdots,n_m);$$

(ii) 如 $p_1+\cdots+p_m=n_1+\cdots n_m$，

$$p_1=n_1,\cdots,p_k=n_k,\quad 但\ p_{k+1}>n_{k+1}，则$$

$$(p_1,\cdots,p_m)\subset(n_1,\cdots,n_m).$$

于是函数系 $\{\psi_{m_1\cdots m_n}(w)\}$ 可以用一个指标表示，即 $\{\psi_\nu(w)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$.

首先指出在此函数系中取任意多个函数，皆是线性独立的. 否则，有常数 $k_{p_1\cdots p_n}$，使得

$$\sum_{(p_1,\cdots,p_m)\subseteq(n_1,\cdots,n_m)} k_{p_1\cdots p_m}\psi_{p_1\cdots p_m}(w)=0. \qquad (3.5.16)$$

由(3.5.12)式中取

$$f(w)=\frac{1}{n_1!\cdots n_m!}(w^1-z^1)^{n_1}\cdots(w^m-z^m)^{n_m},$$

以 $f(w)$ 乘(3.5.16)式的复共轭，并在 $\mathfrak{C}$ 上积分，得

$$k_{n_1\cdots n_m}=0.$$

重复应用此法，可知 $k_{p_1\cdots p_m}=0,\forall\ (p_1,\cdots,p_m)\subseteq(n_1,\cdots,n_m)$. 所以 $\{\psi_{p_1\cdots p_m}(w)\}$ 在 $\mathfrak{R}$(包括特征流形上)是线性独立的.

令

$$a_{\mu\nu}=\int_{\mathfrak{C}}\psi_\mu(u)\,\overline{\psi_\nu(u)}\dot{u}\quad(\mu,\nu=0,1,2,\cdots)\qquad (3.5.17)$$

及

$$H_\nu=\begin{pmatrix} a_{0\bar{0}} & a_{0\bar{1}} & \cdots & a_{0\bar{\nu}} \\ a_{1\bar{0}} & a_{1\bar{1}} & \cdots & a_{1\bar{\nu}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu\bar{0}} & a_{\nu\bar{1}} & \cdots & a_{\nu\bar{\nu}} \end{pmatrix}\quad(\nu=0,1,2,\cdots),\ (3.5.18)$$

这是 $(\nu+1)\times(\nu+1)$ 正定方阵，因为 $\psi_0(w),\psi_1(w),\cdots,\psi_\nu(w)$ 在 $\mathfrak{C}$ 上是线性独立的，令 H_ν 的逆方阵为

$$H_\nu^{-1}=\begin{pmatrix} a_\nu^{\bar{0}0} & a_\nu^{\bar{0}1} & \cdots & a_\nu^{\bar{0}\nu} \\ a_\nu^{\bar{1}0} & a_\nu^{\bar{1}1} & \cdots & a_\nu^{\bar{1}\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_\nu^{\bar{\nu}0} & a_\nu^{\bar{\nu}1} & \cdots & a_\nu^{\bar{\nu}\nu} \end{pmatrix}. \tag{3.5.19}$$

令

$$\varphi_\nu(w)=\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\bar{\nu}\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\bar{\nu}\alpha}\psi_\alpha(w), \tag{3.5.20}$$

则当 $\mu\geqslant\nu$ 时，

$$\int_{\mathfrak{C}}\varphi_\mu(u)\,\overline{\varphi_\nu(u)}\dot{u}=\frac{1}{\sqrt{a_\mu^{\bar{\mu}\mu}a_\nu^{\bar{\nu}\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}\ \sum_{\beta=0}^{\mu}a_\mu^{\bar{\mu}\beta}a_{\beta\bar{\alpha}}a_\nu^{\bar{\alpha}\nu}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_\mu^{\bar{\mu}\mu}a_\nu^{\bar{\nu}\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}\delta_\alpha^\mu a_\nu^{\bar{\alpha}\nu}=\delta_{\mu\nu}. \tag{3.5.21}$$

于是$\{\varphi_\nu(w)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$是 $A(\mathfrak{R})$的在 $\mathfrak{C}$ 上的正交就范函数系.

如 $f\in A(\mathfrak{R})$，令

$$a_\nu=\int_{\mathfrak{C}}f(u)\,\overline{\varphi_\nu(u)}\dot{u},\quad f_1(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(w), \tag{3.5.22}$$

则此级数在 $\mathfrak{R}$ 的任一紧子集中绝对且一致收敛. 实际上，由

$$\int_{\mathfrak{C}}\left|f(u)-\sum_{\nu=0}^{N}a_\nu\varphi_\nu(u)\right|^2\dot{u}\geqslant 0,$$

可知

$$\sum_{\nu=0}^{N}|a_\nu|^2\leqslant\int_{\mathfrak{C}}|f(u)|^2\dot{u}. \tag{3.5.23}$$

故$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2$是收敛的.

由于 $\varphi_\nu(w)\in A(\mathfrak{R})$，取 Cauchy 公式

$$\varphi_\nu(w)=\int_{\mathfrak{C}}\varphi_\nu(u)S(w,\bar{u})\dot{u}$$

的复共轭，得

$$\overline{\varphi_\nu(w)}=\int_{\mathfrak{C}}S(u,\bar{w})\,\overline{\varphi_\nu(u)}\dot{u}.$$

由于 $S(u,\overline{w})$ 对 $u\in\mathfrak{R}$ 是属于 $A(\mathfrak{R})$ 的，其相当于(3.5.22)的展开式为

$$S_1(u,\overline{w}) = \sum_{r=0} \overline{\varphi_\nu(w)}\varphi_\nu(u),$$

根据不等式(3.5.23)，有

$$\sum_{\nu=0}^{N} |\varphi_\nu(w)|^2 \leqslant \int_{\mathfrak{C}} |S(u,\overline{w})|^2 \dot{u} = S(w,\overline{w}) \leqslant M_K,$$

$$(w \in K \text{ 为 } \mathfrak{R} \text{ 的紧子集，} M_K \text{ 为正常数.})$$

即 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(w)|^2$ 在 K 一致收敛. 因此，当 $w\in K$ 时，由 Schwarz 不等式

$$\left|\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu\varphi_\nu(w)\right|^2 \leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{N} |a_\nu\varphi_\nu(w)|\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{N} |a_\nu|^2\right)\sum_{\nu=0}^{N} |\varphi_\nu(w)|^2 \leqslant M_K \sum_{\nu=0}^{N} |a_\nu|^2, \tag{3.5.24}$$

由此可知，(3.5.22)定义的级数 $f_1(w)$ 当 $w\in K$ 时，绝对并一致收敛. 同理，

$$S_1(u,\overline{w}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\varphi_\nu(w)}\varphi_\nu(u) \tag{3.5.25}$$

当 $(u,w)\in K\times K$ 时，绝对并一致收敛.

最后要证

$$f_1(w) = f(w). \tag{3.5.26}$$

由(3.5.12)与(3.5.15)，当 z 固定

$$\left[\frac{\partial^n f(w)}{(\partial w^1)^{n_1}\cdots(\partial w^m)^{n_m}}\right]_{w=z} = \int_{\mathfrak{C}} f(u)\overline{\psi}_{n_1\cdots n_m}(u)\dot{u}. \tag{3.5.27}$$

由(3.5.20)，知

$$\int \varphi_\mu(u)\,\overline{\psi_\nu(u)}\dot{u} = \frac{1}{\sqrt{a_\mu^{\mu\mu}}}\sum_{\alpha=0}^{\mu} a_\mu^{\mu\alpha}\int_{\mathfrak{C}} \psi_\alpha(u)\,\overline{\psi_\nu(u)}\dot{u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_\mu^{\mu\mu}}}\sum_{\alpha=0}^{\mu} a_\mu^{\mu\alpha} a_{\alpha\nu}$$

$$
= \begin{cases} 0, & \text{当 } \nu < \mu; \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_\mu^{\mu\mu}}} \neq 0, & \text{当 } \nu = \mu. \end{cases} \tag{3.5.28}
$$

把(3.5.27)式中的 $f(w)$ 换为 $\varphi_\mu(w)$，上式即为

$$
\left[\frac{\partial^p \varphi_{n_1\cdots n_m}(w)}{(\partial w^1)^{p_1}\cdots(\partial w^m)^{p_m}}\right]_{w=z} = 0 \quad \begin{pmatrix}\text{当}(p_1,\cdots,p_m) \\ \subset (n_1,\cdots,n_m)\end{pmatrix};
$$

$$
\left[\frac{\partial^n \varphi_{n_1\cdots n_m}(w)}{(\partial w^1)^{n_1}\cdots(\partial w^m)^{n_m}}\right]_{w=z} \neq 0. \tag{3.5.29}
$$

若 μ 对应的指标组为 $(n_1,\cdots,n_m)$，ν 对应的指标组为 $(p_1,\cdots,p_m)$，令

$$
\frac{\partial \varphi_\mu(w)}{(\partial w)^\nu} = \frac{\partial^p \varphi_{n_1,\cdots,n_m}(w)}{(\partial w^1)^{p_1}\cdots(\partial w^m)^{p_m}}, \tag{3.5.30}
$$

而(3.5.29)即

$$
\left[\frac{\partial \varphi_\mu(w)}{(\partial w)^\nu}\right]_{w=z} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \nu < \mu; \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_\mu^{\mu\mu}}} \neq 0, & \text{当 } \nu = \mu. \end{cases} \tag{3.5.31}
$$

由上式知，

$$
\left[\frac{\partial f_1(w)}{\partial w^\nu}\right]_{w=z} = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu \left[\frac{\partial \varphi_\mu(w)}{(\partial w)^\nu}\right]_{w=z}.
$$

令

$$
f^{(N)}(w) = \sum_{\mu=0}^{N} a_\mu \varphi_\mu(w), \quad N = 0,1,2,\cdots,
$$

这是属于 $A(\mathfrak{R})$ 的. 当 $N>\nu$ 时，根据(3.5.31)，有

$$
\left[\frac{\partial f^{(N)}(w)}{(\partial w)^\nu}\right]_{w=z} = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu \left[\frac{\partial \varphi_\mu(w)}{(\partial w)^\nu}\right]_{w=z} = \left[\frac{\partial f_1(w)}{(\partial w)^\nu}\right]_{w=z}. \tag{3.5.32}
$$

另一方面，当 $N>\nu$ 时，

$$
\int_{\mathfrak{C}} f^{(N)}(u)\,\overline{\varphi_\nu(u)}\,\dot{u} = a_\nu = \int_{\mathfrak{C}} f(u)\,\overline{\varphi_\nu(u)}\,\dot{u}.
$$

根据(3.5.20),上式即

$$\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\nu\alpha}\int_{\mathfrak{C}}f^{(N)}(u)\,\overline{\psi_\alpha(u)}\dot{u}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\nu\alpha}\int_{\mathfrak{C}}f(u)\,\overline{\psi_\alpha(u)}\dot{u}.$$

根据(3.5.12),上式即

$$\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\nu\alpha}\left[\frac{\partial f^{(N)}(w)}{(\partial w)^\alpha}\right]_{w=z}=\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\nu\alpha}\left[\frac{\partial f(w)}{(\partial w)^\alpha}\right]_{w=z}.$$

以(3.5.32)代入上式,得

$$\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\nu\alpha}\left[\frac{\partial f_1(w)}{(\partial w)^\alpha}\right]_{w=z}=\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\nu\alpha}\left[\frac{\partial f(w)}{(\partial w)^\alpha}\right]_{w=z}$$

$$(\nu=0,1,2,\cdots).$$

因此有

$$\left[\frac{\partial f_1(w)}{(\partial w)^\alpha}\right]_{w=z}=\left[\frac{\partial f(w)}{(\partial w)^\alpha}\right]_{w=z},\nu=0,1,2,\cdots.$$

此即 $\mathfrak{R}$ 中全纯函数 $f_1(w)$与 $f(w)$在 z 点的各阶导数皆相等,因此有

$$f_1(w)=f(w),\text{当 } w\in\mathfrak{R}.$$

同理,把 $S(w,\bar{z})$ (当 $z\in\mathfrak{R}$ 固定)看作是 w 的属于 $A(\mathfrak{R})$的函数,便有

$$S_1(w,\bar{z})=S(w,\bar{z}).$$

定理证毕. ▌

在定理的证明中包含了以下的系.

系3.5.3　对任一 $f\in A(\mathfrak{R})$,f 可展为级数

$$f(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(w),\quad a_\nu=\int_{\mathfrak{C}}f(u)\bar{\varphi}_\nu(u)\dot{u}.$$

其在 $\mathfrak{R}$ 的任一紧子集绝对且一致收敛.

但对于定理3.5.2中的级数 $S_1(w,\bar{z})$,我们无法证明它在 $w\in\mathfrak{R}$ 的任一紧子集,当 $z\in\bar{R}$ 时,绝对并一致收敛,除非在 $\mathfrak{R}$ 上加上

很强的条件.

定理3.5.4 设 $\mathfrak{R}$ 是包含原点,并且是 C^m 中以原点为中心的星形、圆形有界域.若 $\mathfrak{R}$ 有特征流形 $\mathfrak{C}$,并且存在 $\mathfrak{R}$ 域的 $\mathfrak{C}$ 的 Cauchy-Szegö 核 $S(w,\bar{z})$,则在 $A(\overline{\mathfrak{R}})$ 中存在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系 $\{\varphi_\nu(w)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$,使得

$$S(w,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(w)\overline{\varphi_\nu(z)}.$$

此级数当 w 在 $\mathfrak{R}$ 的一紧子集 K 有一包含 $\mathfrak{R}$ 的相对紧邻域 $\overline{U}_K$,当 $z\in\overline{U_K}$ 时,是绝对且一致收敛的.

证 由于 $\mathfrak{R}$ 包含原点,我们取

$$\psi_{n_1\cdots n_m}(w) = \left[\frac{\partial^n S(w,\bar{z})}{(\partial\bar{z}^1)^{n_1}\cdots(\partial\bar{z}^m)^{n_m}}\right]_{z=0}.$$

由于 $\mathfrak{R}$ 是以原点为中心的圆型域,故有 $S(e^{i\theta}w,e^{-i\theta}\bar{z})=S(w,\bar{z})$.因此全纯函数

$$\psi_{n_1\cdots n_m}(e^{i\theta}w) = e^{in\theta}\psi_{n_1\cdots n_m}(w).$$

这说明 $\psi_{n_1\cdots n_m}(w)$ 是 $n=n_1+\cdots+n_m$ 次的 $w=(w^1,\cdots,w^m)$ 的齐次多项式.因此

$$\int_{\mathfrak{C}}\psi_{n_1\cdots n_m}(u)\overline{\psi_{p_1\cdots p_m}(u)}\dot{u} = 0,$$

$$\text{当 } n_1+\cdots+n_m \neq p_1+\cdots+p_m.$$

所以,我们便可以按照定理3.5.2的证明方法,分别把 $\{\psi_{n_1\cdots n_m}(w)\}_{n_1+\cdots n_m=n}$ 在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范化,就可得到 $\mathfrak{C}$ 上的正交就范函数系 $\{\psi_{n_1\cdots n_m}(w)\}$ $(n_1+\cdots+n_m=n,\ n=0,1,2,\cdots)$.级数

$$S_1(w,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+\cdots+n_m=n}\varphi_{n_1\cdots n_m}(w)\overline{\varphi_{n_1\cdots n_m}(z)}$$

在 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ 的紧子集 $K\times K$ 上绝对且一致收敛.由于 $\mathfrak{R}$ 是以原点为中心的星形域,当 $w\in\mathfrak{R}$ 时 $rw\in\mathfrak{R}$ $(0<r\leqslant1)$.由于 $\varphi_{n_1\cdots m_m}(w)$ 是齐次多项式,

$$S_1(rw,\frac{1}{r}\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+\cdots+n_m=n}\varphi_{n_1\cdots n_m}(rw)\varphi_{n_1\cdots n_m}\left(\frac{1}{r}z\right)$$

$$= \sum \varphi_{m_1\cdots m_n}(w)\overline{\varphi_{n_1\cdots n_m}(z)} = S_1(w,\bar{z}).$$

当 $w\in\mathfrak{R}$ 的紧集 $\mathfrak{R}_r$(即把 $\mathfrak{R}$ 按映照 $w\mapsto rw$ 缩小 r 倍),z 在 $\mathfrak{R}$ 的相对紧邻域 $\mathfrak{R}_{\frac{1}{r_1}}$时,我们取 $r<r_1<1$,便知级数 $S_1(w,\bar{z})$当 $w\in\mathfrak{R}_r$,$z\in\mathfrak{R}_{\frac{1}{r_1}}$绝对并一致收敛. 由于

$$S_1(w,\bar{z}) = S(w,\bar{z}),$$

从而定理得到证明. ▌

由此定理知,如 $f\in A(\mathfrak{R})$,则 Cauchy 公式可逐项积分而得到

$$f(w) = \int_{\mathfrak{C}} f(u)S(w,\bar{u})\dot{u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\varphi_\nu(w),$$

$$a_\nu = \int_{\mathfrak{C}} f\bar{\varphi}_\nu\dot{u},$$

但仍不可能由此证明 $f(w)$的展开式在 $\mathfrak{R}$ 或 $\mathfrak{C}$ 上一致收敛.

我们知道,Cauchy-Szegö 核除典型域以外,在有界可递域也存在(见文献[19]),后者的证明并非用 $A(\mathfrak{R})$的 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系证明的,所以定理3.5.2仍有用途. 但一般的具有特征流形 $\mathfrak{C}$ 的 C^m 有界域,Cauchy-Szegö 核是否存在,就不知道了.

§ 3.6　中值定理与代表域

设 $\mathfrak{R}$ 是一个在 C^m 中有特征流形 $\mathfrak{C}$ 的有界域,并且存在 Cauchy-Szegö 核 $S(w,\bar{z})$. 如 $f\in A(\mathfrak{R})$,则有 Cauchy 公式

$$f(w) = \int_{\mathfrak{C}} f(u)S(w,\bar{u})\dot{u}. \tag{3.6.1}$$

对固定的 $z\in\mathfrak{R}$,由于对 w 是 $S(w,\bar{z})\in A(\mathfrak{R})$,因此 $f(w)S(w,\bar{z})\in A(\mathfrak{R})$. 在上式中把 $f(w)$换为 $f(w)S(w,\bar{z})$,有

$$f(w)S(w,\bar{z}) = \int_{\mathfrak{C}} f(u)S(u,\bar{z})S(w,\bar{u})\dot{u}.$$

特别取 $w=z$,有

$$f(z) = \int_{\mathfrak{C}} f(u)P(z,u)\dot{u}, \tag{3.6.2}$$

其中

$$P(z,\overline{u}) = \frac{|S(z,\overline{u})|^2}{S(z,\overline{z})} \tag{3.6.3}$$

称为域 $\mathfrak{R}$ 的形式上的 Poisson 核,而(3.6.2)称为形式上的 Poisson 公式.

由《典》著中第6章可知,当 $\mathfrak{R}$ 是典型域时,如令 $\mathfrak{R}$ 域的 Bergman 度量为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} T_{\alpha\overline{\beta}}(z,\overline{z})\mathrm{d}z^\alpha \overline{\mathrm{d}z^\beta},$$

相应的 Laplace-Baltrami 算子为

$$\Delta_z = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} T^{\overline{\beta}\alpha}(z,\overline{z}) \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}, \tag{3.6.4}$$

则有

$$\Delta_z P(z,u) = 0, \quad 当\ u \in \mathfrak{C}. \tag{3.6.5}$$

从而有理由期望:至少当 $\mathfrak{R}$ 是有界可递域时,同样有(3.6.5)式.然而令人奇怪的是,陆汝钤[54]举出一种有界可递域 $\mathfrak{R}$,而

$$\Delta_z P(z,u) \neq 0, \quad 当\ u \in \mathfrak{C}.$$

因此他猜测,$\Delta_z P(z,u)$是否等于0,是判别一个有界可递域是否是对称域的标准.后来这个猜测为许以超[74]在一类称为 N-Siegel 域的可递域中证实了.此种域都可以全纯等价于一个有界域.

对于非对称的有界可递域 $\mathfrak{R}$,Bergman 度量不是唯一的(在相差一个常数因子的意义下)不变度量.如第2章的例子说明了非对称有界可递域可以有依赖于很多参数的不变度量(参阅文献[80]、[81]),不能排除会有一类不变的 Kähler 度量所对应的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 使 $\Delta_z P(z,u)=0$.此外,典型域的 Poisson 核是由全纯函数的中值定理推出来的(参阅《典》著§5.3),然后证明了它与 Cauchy-Szegö 核的关系是(3.6.3)形式.反之,如果从(3.6.3)定义的形式上的 Poisson 核未必有中值定理,因为未必能找到一点 $z_0 \in \mathfrak{R}$,使得 $P(z_0,u)$与 u 无关.如果有,则由(3.6.2)知

$$f(z_0) = P(z_0,u)\int_{\mathfrak{C}} f(u)\dot{u}.$$

当取 $f\equiv 1$便知,必有

$$P_0(z_0,u)=\frac{1}{v(\mathfrak{C})},$$

故
$$f(z_0)=\frac{1}{v(\mathfrak{C})}\int_{\mathfrak{C}} f(u)\dot{u}.$$

这就是在 $\mathfrak{C}$ 上的中值定理.不妨假定 $z_0=0$,否则,可作一平移,使得 $\mathfrak{R}$ 变为 $\mathfrak{R}_1$,而 z_0变为原点,于是上式化为

$$f(0)=\frac{1}{v(\mathfrak{C})}\int_{\mathfrak{C}} f(u)\dot{u}. \tag{3.6.6}$$

这就是普通中值定理的形式.

但就典型域而言,并非任一全纯等价于一典型域的对称域皆有中值定理.例如在域 $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}(m,n)$:

$$\frac{1}{i}(Z_1-Z_1^{\dagger})-Z_2Z_2^{\dagger}>0,$$

其中 $Z_1\in C^{m\times m}, Z_2\in C^{m\times(n-m)}$是全纯等价于域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$,

$$I-WW^{\dagger}>0,$$

在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的特征流形 $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ 上中值定理成立.而在 $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}(m,n)$中却找不到一点 Z_0,使得作为 $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_1$的不变体积密度的 Poisson 核 $P_1(Z,U)$,有

$$P_1(Z_0,U) \text{ 与 } U \text{ 无关}.$$

而典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$作为一个以原点为中心的代表域(定义见下面),它是有中值定理的,即

$$f(0)=\frac{1}{v(\mathfrak{C}_I)}\int_{\mathfrak{C}_I} f(u)\dot{u}.$$

然而,并非任一有界可递 $\mathfrak{R}$ 域的以原点为中心的代表域都有在特征流形上的中值定理,但它最少有如下的在 $\mathfrak{R}$ 上的中值定理:

$$f(0)=\frac{1}{v(\mathfrak{R})}\int_{\mathfrak{R}} f(z)\dot{z}. \tag{3.6.7}$$

因为如 $\mathfrak{R}$ 是以原点为中心的代表域,它的 Bergman 核 $K(w,\bar{z})=c\det T(w,\bar{z})$,$T(z,\bar{z})$是 Bergman 度量方阵,$c$ 是一常数.由于 $T(0,\bar{z})$与 z 无关(定义3.6.15),故 $K(0,\bar{z})$与 z 无关.因此由

Bergman 积分表示

$$f(0)=\int_{\mathfrak{R}}f(z)K(0,\bar{z})\dot{z}=\frac{1}{v(\mathfrak{R})}\int_{\mathfrak{R}}f(z)\dot{z}.$$

本节就是要证明任一有界可递域的代表域存在，并且把它的全纯自同构 Aut($\mathfrak{R}$)中任一变换用 Bergman 核表示出来(定理3.6.9).

Bergman[4]在 C^N 的有界域 $\mathfrak{D}$ 中引进一映照 φ: t 是 $\mathfrak{D}$ 的固定点，φ的映照函数为

$$w^{\alpha}=\varphi^{\alpha}(z)=T^{\bar{\beta}\alpha}(t,\bar{t})\frac{\partial}{\partial\bar{t}^{\beta}}\log\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})},\qquad(3.6.8)$$

称为代表映照，像 $\mathfrak{D}_1=\varphi(\mathfrak{D})$称为代表域. 但 Bergman 核$K(z,\bar{t})$在$(z,t)\in\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 时可能有零点(例如见文献[64])，因此映照 φ 不见得在整个 $\mathfrak{D}$ 域全纯，它的函数方阵为

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}=T(z,\bar{t})T(t,\bar{t})^{-1},\qquad(3.6.9)$$

其中

$$T(z,\bar{t})=\left(\frac{\partial^2\log K(z,\bar{t})}{\partial z^{\alpha}\partial\bar{t}^{\beta}}\right)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N}\qquad(3.6.10)$$

也可能是奇异的. 因此 φ 未必是局部一一的，这就难以证明 $\varphi(\mathfrak{D})$ 是 C^N 中的有界域. 这样的代表域如何定义就成问题了. 在这里准备给与一个不依赖于代表映照的代表域的定义，使得可以判别 C^N 中一个域 $\mathfrak{D}$ 是不是代表域，并且研究代表域有何性质.

设 $\mathfrak{M}$ 是一 N 维复流形，$\varphi:\mathfrak{D}\to\mathfrak{M}$ 是一双全纯映照. 在像域 $\mathfrak{D}_1=\varphi(\mathfrak{D})$中可以由有界域 $\mathfrak{D}$ 的 Bergman 核与 Bergman 度量诱导出 $\mathfrak{D}_1$的 Bergman 核与 Bergman 度量. 设映照 φ 的局部坐标表示为

$$u^{\alpha}=\varphi^{\alpha}(z),\qquad(3.6.11)$$

则 $\mathfrak{D}_1$的 Bergman 核定义为

$$K_1(u,\bar{v})=K(z,\overline{w})\det\frac{\partial z}{\partial u}\det\overline{\frac{\partial w}{\partial v}},\qquad(3.6.12)$$

其中

$$v^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(w);$$

Bergman 度量在 $\mathfrak{D}_1$ 定义为

$$\mathrm{d}s_1^2 = (\varphi^{-1})^* \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u T_1(u, \bar{u}) \mathrm{d}u^{\dagger}, \tag{3.6.13}$$

其中

$$T_1(u, \bar{u}) = \left(\frac{\partial^2 \log K_1(u, \bar{u})}{\partial u^{\alpha} \partial \bar{u}^{\beta}}\right)_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant N}. \tag{3.6.14}$$

如果我们把双全纯等价下的域看作是同一域，那么 $\mathfrak{D}_1$ 也是 C^N 的有界域.

定义　设 $\mathfrak{D}$ 是 C^N 中的有界域，若有一点 $t \in \mathfrak{D}$ 使得方阵

$$T(z, \bar{t}) = \left(\frac{\partial^2 \log K(z, \bar{t})}{\partial z^{\alpha} \partial \bar{t}^{\beta}}\right)_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant N}. \tag{3.6.15}$$

与 $z \in \mathfrak{D}$ 无关，则 $\mathfrak{D}$ 称为*以 t 点为中心的代表域*.

例　如 $\mathfrak{D}$ 是一个以原点为中心的有界圆型域，必有 $T(z, 0)$ 与 z 无关. 故有界圆型域是以原点为中心的代表域. 特别是所有对称典型域皆是以原点为中心的代表域.

根据定义，以 t 为中心的代表域 $\mathfrak{D}$ 有

$$T(z, \bar{t}) = T(t, \bar{t}) > 0, \tag{3.6.16}$$

因此 $T(z, \bar{t})$ 必为非异的. 由(3.6.15)可知

$$\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\left[\frac{\partial \log K(z, \bar{t})}{\partial \bar{t}^{\beta}}\right] = T_{\alpha\bar{\beta}}(t, \bar{t}),$$

因此

$$\frac{\partial \log K(z, \bar{t})}{\partial \bar{t}^{\beta}} = T_{\alpha\bar{\beta}}(t, \bar{t})(z^{\alpha} - t^{\alpha}) + \frac{\partial \log K(t, \bar{t})}{\partial \bar{t}^{\beta}}. \tag{3.6.17}$$

由此知

$$\frac{\partial^{m+1} \log K(z, \bar{t})}{\partial z^{\alpha_1} \cdots \partial z^{\alpha_m} \partial \bar{t}^{\beta}} = 0, \quad \text{当 } m > 1. \tag{3.6.18}$$

特别是

$$\frac{\partial^{m+1} \log K(t, \bar{t})}{\partial t^{\alpha_1} \cdots \partial t^{\alpha_m} \partial \bar{t}^{\beta}} = 0, \quad \text{当 } m > 1. \tag{3.6.19}$$

定理3.6.1 设 $\mathfrak{D}$ 是 C^N 中的有界域，$\mathfrak{D}_1$是以 s 为中心的代表域，若 $\varphi:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{D}_1$是双全纯映照，把 $\mathfrak{D}$ 映为 $\mathfrak{D}_1$，并且把 $t\in\mathfrak{D}$ 映为 $s=\varphi(t)$，则此映照的函数方阵为

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}=T(z,\bar{t})T(t,\bar{t})^{-1}A,$$

其中 $A=\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\right]_{z=t}$ 适合

$$AT_1(s,\bar{s})A^{\dagger}=T(t,\bar{t}),$$

式中 $T_1(s,\bar{s})$是 $\mathfrak{D}_1$的 Bergman 度量方阵 $T_1(w,\overline{w})$在 $w=s$ 的值.

证 根据(3.6.13)知

$$T(z,\bar{z})=\frac{\partial w}{\partial z}T_1(w,\overline{w})\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\dagger},$$

其中 $w=\varphi(z)$. 由于 $T(z,\bar{t})$与 $T_1(w,\bar{s})$分别在 t 的充分小邻域 V_t 与 s 的充分小邻域 U_s 对 z 及 w 全纯，故有

$$T(z,\bar{t})=\frac{\partial w}{\partial z}T_1(w,\bar{s})\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\dagger}_{z=t}\tag{3.6.20}$$

(参阅《多复变函数引论》中的定理1.2.4，此定理今后称之为对角线定理). 由代表域定义知 $T_1(w,\bar{s})=T_1(s,\bar{s})$为非异的，且与 w 无关，因此 $T(z,\bar{t})$在 $z\in\mathfrak{D}$ 全纯，并且是非异的. 特别是在(3.6.20)中令 $z=t$ 时，有

$$T(t,\bar{t})=AT_1(s,\bar{s})A^{\dagger},$$

并且由(3.6.20)得出

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}=T(z,\bar{t})A^{\dagger\,-1}T_1(s,\bar{s})^{-1}=T(z,\bar{t})T(t,\bar{t})^{-1}A.$$

定理证毕. ∎

系3.6.2 设 $\mathfrak{D}$ 是 C^N 中的有界域，$\mathfrak{D}_1$是以 s 点为中心的代表域，$\varphi:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}_1$是双全纯映照，把 $\mathfrak{D}$ 映为 $\mathfrak{D}_1$，其逆映照为 $f:\mathfrak{D}_1\to\mathfrak{D}$. 设 $t\in\mathfrak{D}$ 使 $s=\varphi(t)$，则 φ 的映照函数适合方程

$$\frac{\partial^2\varphi^{\lambda}(z)}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}}-\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(z,\bar{t})\frac{\partial\varphi^{\lambda}(z)}{\partial z^{\gamma}}=0,$$

其逆映照 f 适合

$$\frac{\partial^2 f^\lambda(w)}{\partial w^\alpha \partial w^\beta} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(f(w), \overline{f(s)}) \frac{\partial f^\mu(w)}{\partial w^\alpha} \cdot \frac{\partial f^\nu(w)}{\partial w^\beta} = 0,$$

其中
$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z,\bar{t}) = \frac{\partial T_{\alpha\bar{\mu}}(z,\bar{t})}{\partial z^\beta} T^{\bar{\mu}\gamma}(z,\bar{t}).$$

证 为方便起见,令

$$B = (B^{\lambda\mu}) = T(t,\bar{t})^{-1}A, \quad A = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}.$$

由定理3.6.1知

$$\frac{\partial \varphi^\lambda(z)}{\partial z^\alpha} = T_{\alpha\mu}(z,\bar{t})B^{\mu\lambda},$$

故由
$$\frac{\partial^2 \varphi^\lambda(z)}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} = \frac{\partial T_{\alpha\mu}(z,\bar{t})}{\partial z^\beta} B^{\mu\lambda}$$

$$= \frac{\partial T_{\alpha\nu}(z,\bar{t})}{\partial z^\beta} T^{\nu\gamma}(z,\bar{t}) T_{\gamma\mu}(z,\bar{t}) B^{\mu\lambda}$$

$$= \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z,\bar{t}) \frac{\partial \varphi^\lambda(z)}{\partial z^\gamma}.$$

同样,如令 $B^{-1} = (B_{\alpha\bar{\beta}})$,有

$$\frac{\partial f^\lambda(w)}{\partial w^\alpha} = B_{\alpha\gamma} T^{\bar{\gamma}\lambda}(z,\bar{t}),$$

故
$$\frac{\partial^2 f^\lambda(w)}{\partial w^\alpha \partial w^\beta} = - B_{\alpha\gamma} T^{\bar{\gamma}\mu}(z,\bar{t}) \frac{\partial T_{\mu\bar{\tau}}(z,\bar{t})}{\partial z^\nu} T^{\tau\lambda}(z,\bar{t}) \frac{\partial f^\nu}{\partial w^\beta}$$

$$= - \frac{\partial f^\mu(w)}{\partial w^\alpha} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(f(w), \overline{f(s)}) \frac{\partial f^\nu(w)}{\partial w^\beta}.$$

系被证明. ▎

系3.6.3 设 $\mathfrak{D}$ 与 $\mathfrak{D}_1$ 分别是以 t 与 s 为中心的代表域,$\varphi: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}_1$ 是双全纯映照,把 $\mathfrak{D}$ 映为 $\mathfrak{D}_1$,并且 $s = \varphi(t)$,则 φ 必为线性变换

$$w^\alpha - s^\alpha = \left[\frac{\partial \varphi^\alpha(z)}{\partial z^\beta}\right]_{z=t} (z^\beta - t^\beta).$$

证 由于 $\mathfrak{D}$ 是以 t 为中心的代表域,$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} T_{\beta\bar{\lambda}}(z,\bar{t}) = 0$,所以 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z,t) = 0$,故由系3.6.2知

$$\frac{\partial^2 \varphi^\lambda(z)}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} = 0.$$

因此变换必为线性的.本系得证. ▌

定理3.6.4 设 $\mathfrak{D}$ 是 C^N 中的有界域,$\mathfrak{D}_1$是以 s 为中心的代表域,$\varphi:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}_1$是双全纯映照把 $\mathfrak{D}$ 映为 $\mathfrak{D}_1$并且把 $t\in\mathfrak{D}$ 点映为 s,则此映照必可写为

$$\varphi(z)=s+\left[\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\log\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}\right]T(t,\bar{t})^{-1}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t},$$

其中$\frac{\partial}{\partial\bar{t}}=\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\bar{t}^N}\right)$.

证 根据定理3.6.1有

$$\mathrm{d}\varphi(z)=\left\{\mathrm{d}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\log K(z,\bar{t})\right]T(t,\bar{t})^{-1}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right\},$$

其中 $\mathrm{d}=\mathrm{d}z^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$, $\varphi(z)=(\varphi^1(z),\cdots,\varphi^N(z))$,

因此有

$$\varphi(z)=\left[\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\log K(z,\bar{t})\right]T(t,\bar{t})^{-1}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}+\psi(t).$$

由于 $\varphi(t)=s$,故

$$\psi(t)=s-\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\log K(t,\bar{t})T(t,\bar{t})^{-1}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}.$$

定理证毕. ▌

特别当 $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1$时,有以下定理:

定理3.6.5 设 $\mathfrak{D}$ 是以 s 点为中心的代表域,$\varphi:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ 是 $\mathfrak{D}$ 的全纯自同构,并且把 $t\in\mathfrak{D}$ 映为 $s=\varphi(t)$,则此变换必为以下的形式:

$$\varphi(z)=s+\left[\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\log\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}\right]T(t,\bar{t})^{-1}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t},$$

其中$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}$适合

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}T(s,\bar{s})\left[\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right]^{\dagger}=T(t,\bar{t}).$$

特别是,如果 φ 把中心映为中心时,φ 必为线性变换

$$w^\alpha - s^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha(s)}{\partial s^\beta}(z^\beta - s^\beta),$$

其中

$$\frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} T(s,s) \left[\frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} \right]^\dagger = T(s,s).$$

由于 $T(s,\bar{s})$ 与 $T(t,\bar{t})$ 皆是正定的，函数矩阵 $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}$ 当 $s=\varphi(t)$ 时可写为

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = [T(t,\bar{t})]^{\frac{1}{2}} U [T(s,\bar{s})]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.6.21}$$

其中 U 为 $N\times N$ 酉方阵. 特别当 $s=t$ 时，

$$\frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} = [T(s,\bar{s})]^{\frac{1}{2}} U [T(s,\bar{s})]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.6.22}$$

即 $\mathfrak{D}$ 的 s 点固定分群与酉群的一个子群同构.

定理3.6.5的重要性就在于：一个代表域的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{D})$ 全部可以由 Bergman 核表达出来，即由定理中的变换生成，因为任一 $\psi\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D})$，则必有 $\mathfrak{D}$ 中的点 t_1 经 ψ 映为中心 s. 于是 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 使中心不变，因而是线性变换. 特别是 φ^{-1} 必把某一点 $t_2\in\mathfrak{D}$ 映为中心 s，它亦可写为定理3.6.5中的形式.

由于典型域是原点为中心的代表域，故它的变换可以用定理3.6.5统一表示. 现在的问题是：是否有界可递域皆可全纯等价于一个代表域？如果能够，它的变换必可写为定理3.6.5的形式. 反之，有以下定理：

定理3.6.6 设 $\mathfrak{D}$ 是有界域，若变换

$$w = \varphi(z) = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \log \frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})} \right] T(t,\bar{t})^{-1}$$

是一个双全纯变换，则其像域 $\mathfrak{D}_1=\varphi(\mathfrak{D})$ 是一个以原点为中心的代表域.

证 由于变换是一一的，函数方阵

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = T(z,\bar{t}) T(t,\bar{t})^{-1}$$

必为非异的，故 $T(z,\bar{t})$ 为非异的. 设 $\mathfrak{D}_1$ 的 Bergman 度量方阵为 $T_1(w,\overline{w})$，根据(3.6.20)及上式，知

$$T_1(w,0)=\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\right]^{-1}T(z,\bar{t})\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\right]^{\dagger\;-1}_{z=t}$$

$$=T(t,\bar{t})T(z,\bar{t})^{-1}T(z,\bar{t})$$

$$=T(t,\bar{t}).$$

这与 w 无关，故 $\mathfrak{D}_1$ 是代表域. 定理证毕. ▌

如果 $K(z,\bar{t})$ 在 $z\in\mathfrak{D}$ 时没有零点，则(3.6.8)的变换是全纯的. 再如果能证明 $T(z,\bar{t})$ 对 $z\in\mathfrak{D}$ 是非异的，则变换是局部一一的. 若 $\mathfrak{D}$ 是单连通的，则变换为双全纯的.

定理3.6.7 设 $\mathfrak{D}$ 是 C^N 中的有界可递域，则其 Bergman 核 $K(w,\bar{z})$ 当 $(w,z)\in\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 时无零点，而 $T(w,\bar{z})$ 在 $(w,z)\in\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 是非异的.

证 设

$$S=\{(w,z)\in\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}\,|\,K(w,\bar{z})=0\}$$

是非空的. 由于 $K(w,\bar{z})=0$ 是在 $\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 中对 w 及 $\bar{z}$ 全纯的函数，S 是 $\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 中的 $2N-1$ 维解析集，它的常点——即 S 中

$$\frac{\partial}{\partial w^\alpha}K(w,\bar{z}) \text{ 与 } \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}K(w,\bar{z})$$

不全为零的点是 $2N-1$ 维复流型 S_0，由于 $K(w,\bar{z})$ 非常数，S_0 必非空(见108页注①).

根据 H. Cartan 定理[7]：有界的可递域 $\mathfrak{D}$，其自同构群是一个李变换群，即 Aut($\mathfrak{D}$)的变换可写为

$$w^\alpha=\varphi^\alpha(z,t),t=(t_1,\cdots,t_r)\text{ 是实参数.}\qquad(3.6.23)$$

当 t 在李变换群 Aut($\mathfrak{D}$)的单位变换的充分小邻域中，$|t_j|<\varepsilon(j=1,\cdots,r)$，$\varphi^\alpha(z)$ 有展开式

$$\varphi^\alpha(z,t)=z^\alpha+\sum_{a=1}^{r}t^a\xi^\alpha_a(z)+t\text{ 的高阶项,}\qquad(3.6.24)$$

其中 $\xi^\alpha_a(z)$ 是对 z 在 $\mathfrak{D}$ 全纯的，称为无穷小变换($a=1,\cdots,r$). 由于 $\mathfrak{D}$ 是可递的，必有 $r\geqslant 2N$，并且 $r\times 2N$ 矩阵 $(\xi(z),\overline{\xi(z)})$ 的秩为

$2N$(见文献[15]),

其中

$$\xi(z)=\begin{pmatrix}\xi_1^1(z) & \xi_1^2(z) & \cdots & \xi_1^N(z)\\ \xi_2^1(z) & \xi_2^2(z) & \cdots & \xi_2^N(z)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_r^1(z) & \xi_r^2(z) & \cdots & \xi_r^N(z)\end{pmatrix}, \qquad (3.6.25)$$

其秩必为 N. 由于 $\varphi\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D})$,我们有

$$K(\varphi(w,t),\overline{\varphi(z,t)})=K(w,\bar{z})\left[\det\frac{\partial\varphi(w)}{\partial w}\right]^{-1}\left[\det\overline{\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}}\right]^{-1}, \qquad (3.6.26)$$

其中 $\det\dfrac{\partial\varphi(w)}{\partial w}\neq 0$. 因此,如 $(w,z)\in S$,必有 $K(\varphi(w,t),\overline{\varphi(z,t)})=0$. 换言之,

$$u^\alpha=\varphi^\alpha(w,t)=w^\alpha+\sum t^a\xi_a^\alpha(w)+\cdots,$$

$$v^\alpha=\varphi^\alpha(z,t)=z^\alpha+\sum t^a\xi_a^\alpha(z)+\cdots. \qquad (3.6.27)$$

把解析集 S 映为解析集 S_t,S_t 也使 $K(u,\bar{v})=0$,我们得到了一簇 $\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 中的解析集 S_t,$|t_j|<\varepsilon\ \ (j=1,\cdots,r)$,皆是 $K(w,\bar{z})$ 的零点. 我们只考虑 S 中的常点集 S_0. 不妨设在 $(w_0,z_0)\in S_0$ 有

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}^N}K(w,\bar{z})\neq 0,$$

则在 (w_0,z_0) 的充分小邻域中可解出

$$\bar{z}^N=\psi(w,\bar{z}^1,\cdots,\bar{z}^{N-1}), \qquad (3.6.28)$$

这是 w 与 $(\bar{z}^1,\cdots,\bar{z}^{N-1})$ 的全纯函数,以之代入(3.6.27),就得到 $(u,v)\in S_t$.

令 $z_1=(z^1,\cdots,z^{N-1})$. (3.6.27)的 $(4N-2+r)\times 4N$ 函数矩阵在 $t=0$ 为

$$\left[\frac{\partial(u,\bar{u},v,\bar{v})}{\partial(w,\bar{w},z_1,\bar{z}_1,t)}\right]_{t=0}$$

$$= \begin{pmatrix} I^{(2N)} & (0,a') & (0,a^{\dagger}) \\ 0 & (I^{(N-1)},b') & (0,0) \\ 0 & (0,0) & (I^{(N-1)},b^{\dagger}) \\ (\xi(w),\overline{\xi(w)}) & \xi(z) & \overline{\xi(z)} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2N \\ N-1 \\ N-1 \\ r \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \text{列数}: 2N, & N, & N \end{matrix} \tag{3.6.29}$$

其中

$$a = \left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial w^N}, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{w}^1}, \cdots, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{w}^N} \right),$$

$$b = \left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z^{N-1}} \right),$$

由于$\overline{\xi(z)}$的秩为 N,它的最后一列

$$\begin{pmatrix} \overline{\xi_1^N(z)} \\ \vdots \\ \overline{\xi_r^N(z)} \end{pmatrix}$$

不能为零.

设$\overline{\xi_j^N}(z) \neq 0$,对某一个 $j(1 \leqslant j \leqslant r)$,则由函数矩阵的首$4N-2$行与第$4N-2+j$行所成的$(4N-1)\times 4N$矩阵的秩为$2N-1$,故函数矩阵

$$\frac{\partial(u,\overline{u},v,\overline{v})}{\partial(w,\overline{w},z_1,\overline{z}_1,t)}$$

在$|t_a|$充分小时,其秩最小为$4N-1$. 因此在 $K(u,\overline{v})=0$的零点集合中,最少有一子集是$4N-1$维微分流形,但对 w 及对 $\overline{z}$ 全纯的函数 $K(w,\overline{z})$的零点,最高是$2N-1$维解析集,即实维最高是$4N-2$,除非 $K(w,\overline{z}) \equiv 0$,这是不可能的,除非 S 是空集,即$K(w,z)$在$(w,z)\in\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 时没有零点(在文献[74]中在 $\mathfrak{D}$ 是 N-Siegel 域时已有此结果). 对于可递域可知(例如见文献[35]):

$$\det T(w,\overline{z}) = cK(w,\overline{z}), \quad (w,z)\in\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}. \tag{3.6.30}$$

因此 $T(w,\overline{z})$在$(w,z)\in\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ 是非异的. 定理证毕. ▌

Vinberg、Gin*d*ikin 与 Pjatetski-Shapiro[67]证明了有界可递域 $\mathfrak{D}$ 是单连通的,即 $\mathfrak{D}$ 的代表映照存在,也即对固定点 $t\in\mathfrak{D}$,映照

$$w^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(z) = T^{\bar{\beta}\alpha}(t,\bar{t})\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{\beta}}\log\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})} \qquad (3.6.31)$$

是在 $\mathfrak{D}$ 全纯的，并且是一一的. 根据定理3.6.6知，$\mathfrak{D}_1 = f(\mathfrak{D})$是以原点为中心的代表域.

定理3.6.8　设 $\mathfrak{D}$ 为 C^N 中的有界可递域，则必全纯等价于一个以原点为中心的代表域 $\mathfrak{D}_1$. 此代表域在如此的意义下是唯一的，若另有双全纯映照 $\varphi_1:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}_1$，把 $t\in\mathfrak{D}$ 映为原点，并且 φ 的函数方阵在 t 点为单位方阵，则 $\varphi_1=\varphi$.

唯一性是根据 H. Cartan 的唯一性定理(见《多复变函数引论》中的定理3.1.2).

根据定理3.6.5，可得以下定理：

定理3.6.9　设 $\mathfrak{D}$ 是以原点为中心的代表域，并且是可递的. $\varphi_t:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ 是全纯自同构，$\varphi_t(t)=0$，则 φ_t 可表达为：

$$\varphi_t^{\alpha}(z) = \left[\frac{\partial\varphi_t^{\alpha}(z)}{\partial z^{\beta}}\right]_{z=t} T^{\bar{\lambda}\beta}(t,\bar{t})\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{\lambda}}\log\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})},$$

其中$\dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t}$适合

$$\left[\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial z}\right]_{z=t} T(0,0)\left[\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial z}\right]_{z=t}^{\dagger} = T(t,\bar{t}),$$

并且 Aut($\mathfrak{D}$)是由变换 φ_t 生成的，因此 Aut($\mathfrak{D}$)在原点的固定分群 $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{D})$(这是线性变换)确定，则 Aut($\mathfrak{D}$)完全确定.

由此定理知，只要 $\mathfrak{D}$ 的 Bergman 核 $K(z,\bar{t})$已知及 $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{D})$已知，则 Aut($\mathfrak{D}$)便可知道. 但有时我们要用到的，并不要知道 $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{D})$，例如，由定理第二个公式知

$$\det\left[\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial z}\right]_{z=t}\det\left[\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial z}\right]_{z=t}^{\dagger} = \frac{\det T(t,\bar{t})}{\det T(0,0)}. \qquad (3.6.32)$$

如 $T(0,0)=cI$　(c 为正常数)，则

$$\left[\frac{\partial\varphi_0(z)}{\partial z}\right]_{z=0},\ \varphi_0\in\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{D}) \qquad (3.6.33)$$

是酉方阵，此时

$$T(t,\bar{t}) = c\det\left[\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial z}\right]_{z=t}\det\left[\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial z}\right]^{\dagger}_{z=t}. \quad (3.6.34)$$

我们总可作一线性变换,把 $\mathfrak{D}$ 映为 $\mathfrak{D}_1$,这也是以原点为中心的代表域,使得其度量方阵

$$T_1(0,0) = cI. \quad (3.6.35)$$

此时 $\mathfrak{D}_1$称为正规化的代表域.

定理3.6.9的变换可以写为矩阵的形式:

$$\varphi_t(z) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}\right)T(t,t)^{-1}\left[\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial z}\right]_{z=t}, \quad (3.6.36)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\bar{t}^N}\right).$$

如果 $\mathfrak{D}$ 是正规化的,则有以下的系:

系3.6.10 如果 $\mathfrak{D}$ 是以原点为中心的正规化可递的代表域,则把 $t\in\mathfrak{D}$ 映为原点的全纯自同构,必为如下的形式:

$$\varphi_t(z) = \left[\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\log\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}\right][T(t,\bar{t})]^{-\frac{1}{2}}U,$$

其中 U 为酉方阵,使得变换

$$w = zU$$

把 $\mathfrak{D}$ 一一地映为自身的变换.

第 4 章

各种积分表示的估值

上一章已讨论过多复变函数论的各种积分表示.有了表示,可根据积分表示的核,来估计方程之解的值.例如在单复变数函数论中,由 Cauchy 公式可得 Cauchy 不等式,用以估计一全纯函数各阶导数的值,以及由此得到其幂级数展开的收敛半径;由 Poisson 公式得出 Hanack 不等式.在多复变数函数论中,虽然自华罗庚始(参阅文献[24]及《典》著),早已得到典型域的 Cauchy 公式及 Poisson 公式几十年之久,但未想到对它们作一估值.直到 1984 年作者看到 Henkin-Leiterer 的书[28],才详细知道 Henkin 的著名工作——强拟凸域的 $\bar{\partial}$-方程解的积分表示及一致估计——的证明之后(作者当时在 Princeton 高等研究所,刚买到此书),才想起是否要对典型域的各种积分表示作一些估值.当时莫毅明博士在 Princeton 大学,他极力建议我做典型域的 $\bar{\partial}$-方程解的积分表示及一致估计.我注意到 Henkin 的工作主要用到两个工具:其一是 Leray 的 Cauchy-Fantappiè 公式[34],其二是 Henkin 称之为全纯的 Leray 映照.作者在 1965 年吴新谋教授主持的 Leray 的 Cauchy 问题讨论班上,就报告过上面所引的 Leray 的文章,随后即证明华罗庚的典型域的 Cauchy 公式,可以由 Cauchy-Fantappiè 公式推出(见文献[39]),并且在证明中主要是构造了一个现在称之为全纯的 Leray 映照.所以我们把从前的文章找到后,没用到两个星期便把典型域 $\bar{\partial}$-问题之解的积分表示作出来了.1985 年初,在 Princeton 大学报告过一次,并把预印本寄了一份给 Henkin (Henkin 的文章[27]中提到此预印本).1985 年秋,在马普数学研究所又报告过一次.并与莫博士又在德国相遇,他督促我尽快发表,

并把一致估计也作完.但我并不满意已得的结果,觉得可以用较简捷的方法获得更广的结果.但在1985年底回国之后,便为一系列不愉快的事件所苦,1986年大病一场,1987年钟家庆在美国去世,1989年王启明又在美国去世,以及相继而来的麻烦,使得我到1992年庆祝苏步青先生90寿辰时国际学术会议上才初次把更广的结果作了报告,发表时已到1993年,前后近十年.至于为什么已知道Cauchy-Fantappiè公式及全纯Leray映照而没有考虑典型域$\bar{\partial}$方程解的积分表示,则是由于该文发表时"十年动乱"已经开始,一切外国刊物都禁止订阅,本国的也停刊,不准进图书馆,更不准搞学术研究.在那种特殊情况和环境下,我根本就不知道什么叫$\bar{\partial}$问题,这个问题在那时是刚刚兴起的.1976年J. Kohn随美国科学院代表访问我国时,可能介绍过,但我属于不准与外国人接触的一类人,所以不知道他的报告.但代表团成员之一——伍鸿熙教授指名要见我,于是我被动员去见他了,至今我还是非常感谢伍鸿熙教授.从那以后我又被容许与外国人接触了,所以我第一个邀请来中国讲学的是伍鸿熙教授,接着是肖荫堂、丘成桐教授.从肖荫堂教授1979年的讲学中,使我略知道了$\bar{\partial}$问题,但后来又为行政事务所缠,无法搞什么研究工作,退下来之后已是1984年了.

但用Bergman核的积分表示来作估值,是早在1956年开始(见文献[36])的,这就是Schwarz引理方面的工作,所以本章也由Bergman核开始.

§4.1 Bergman积分的估值

令$\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$代表$C^N$的有界域$\mathfrak{D}$中全纯且绝对值平方可积的函数类.在$\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$中存在完备的正交就范函数系$\{\varphi_\nu(z)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$使得Bergman核

$$K(w,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(w)\,\overline{\varphi_\nu(z)} \qquad (4.1.1)$$

存在(参阅文献[37]第Ⅱ章).当我们考虑双全纯映照φ: $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}_1$,

$\mathfrak{D}_1$ 也是 C^N 中有界域时，$\mathfrak{D}_1$ 的核函数$K_1(w,\overline{w})$与原来的 $K(z,\overline{z})$ 有下列关系：

$$K_1(\varphi(z),\overline{\varphi(z)}) = K(z,\overline{z})\left(\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{-1}\left(\det\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial z}\right)^{-1}, \tag{4.1.2}$$

故 $K(z,\overline{z})$是权为$(-1,-1)$的标量，而 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$的元素 f 在双全纯映照下是权$(-1,0)$的全纯标量，即如 $f(z)\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$，对应的

$$\tilde{f}(w) = f(z)\left(\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{-1}, w = \varphi(z). \tag{4.1.3}$$

使$\tilde{f}(w)\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D}_1)$. 由此可知(本节用和号的省略)：

$$\frac{\partial\tilde{f}(w)}{\partial w^\alpha} = \left(\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial f(z)}{\partial z^\beta}\frac{\partial z^\beta}{\partial w^\alpha} - \left(\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{-1}$$

$$\times f(z)\frac{\partial\log\det\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\partial z^\beta}\cdot\frac{\partial z^\beta}{\partial w^\alpha}.$$

这是说，$\dfrac{\partial f(z)}{\partial z^\alpha}$不是协变的，但我们可引进一标量的联络

$$B_\alpha(z,\overline{z}) = \frac{\partial\log K(z,\overline{z})}{\partial z^\alpha}. \tag{4.1.4}$$

由(4.1.2)知，如令

$$\widetilde{B}_\alpha(w,\overline{w}) = \frac{\partial\log K_1(w,\overline{w})}{\partial w^\alpha},$$

则在双全纯映照 $w=\varphi(z)$下，

$$\widetilde{B}_\alpha(w,\overline{w}) = \left[B_\beta(z,\overline{z}) - \frac{\partial\log\det\dfrac{\partial w}{\partial z}}{\partial z^\beta}\right]\frac{\partial z^\beta}{\partial w^\alpha},$$

$$\overline{\widetilde{B}_\alpha(w,\overline{w})} = \left[\overline{B_\beta(z,\overline{z})} - \frac{\partial\log\det\overline{\dfrac{\partial w}{\partial z}}}{\partial\overline{z}^\beta}\right]\frac{\overline{\partial z^\beta}}{\partial\overline{w}^\alpha}. \tag{4.1.5}$$

若我们定义权$(-1,0)$的标量 $f(z)$的协变微分为：

$$\frac{\delta f(z)}{\delta z^\alpha} = \frac{\partial f(z)}{\partial z^\alpha} - f(z)B_\alpha(z,\overline{z}), \tag{4.1.6}$$

则由(4.1.5)与(4.1.3)易证

$$\frac{\delta \tilde{f}(w)}{\delta w^\alpha} = \frac{\partial \tilde{f}(w)}{\partial w^\alpha} - \tilde{f}(w)\tilde{B}_\alpha(w,\overline{w})$$
$$= \left(\det \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\delta f(z)}{\delta z^\beta} \frac{\partial z^\beta}{\partial w^\alpha}. \tag{4.1.7}$$

由此知，$\frac{\delta f(z)}{\delta z^\beta}$是权$(-1,0)$的协变向量. 但注意，虽然$f(z)$全纯，但$\frac{\delta f(z)}{\delta z^\alpha}$不再是全纯.

一般的，在$\mathfrak{D}$定义的可微分量$\varphi(z)$称为权(p,q)标量，p,q为实数，若在双全纯映照$w=\varphi(z)$下，在$\mathfrak{D}_1$相应的量$\tilde{\varphi}(w,\overline{w})$有如下关系：

$$\tilde{\varphi}(w,\overline{w}) = \left(\det \frac{\partial w}{\partial z}\right)^p \left(\det \overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)^q \varphi(z,\bar{z}). \tag{4.1.8}$$

例如核函数$K(z,\bar{z})$是权为$(-1,-1)$的标量.

从微分几何的语言看，$B_\alpha(z,\bar{z})$是$\mathfrak{D}$上的线丛$L(\mathfrak{D})$的联络. 注意，这里尚未在$\mathfrak{D}$中引进微分度量，也没有引进$\mathfrak{D}$上向量丛$V(\mathfrak{D})$的联络，从核函数本身便可定义$\mathfrak{D}$上线丛的联络$B_\alpha(z)$. 但如不引进向量丛的联络，则$\frac{\partial}{\partial z^\beta}\cdot\frac{\delta f(z)}{\delta z^\alpha}$不再是在双全纯映照下的协变.

引进$\mathfrak{D}$上向量丛的联络，最自然的是从 Bergman 度量

$$ds^2 = T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})dz^\alpha \overline{dz}^\beta, \quad T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z}) = \frac{\partial^2 \log K(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \tag{4.1.9}$$

诱导出的 Kähler 联络

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z,\bar{z}) = \frac{\partial T_{\alpha\lambda}(z,\bar{z})}{\partial z_\beta} T^{\lambda\gamma}(z,\bar{z}) = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}(z,\bar{z}), \tag{4.1.10}$$

其中$T^{\alpha\beta}(z,\bar{z})$是 Bergman 度量方阵

$$T(z,\bar{z}) = (T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z}))_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N} \tag{4.1.11}$$

的逆方阵$[T(z,\bar{z})]^{-1}$的元素. 在双全纯映照$w=\varphi(z)$下，$\mathfrak{D}_1$域的度量方阵为

$$T_1(w,\overline{w}) = \frac{\partial z}{\partial w} T(z,\bar{z}) \left(\frac{\partial z}{\partial \overline{w}} \right)^{\dagger}, \tag{4.1.12}$$

因此有

$$\partial T_1(w,\overline{w}) T_1(w,\overline{w})^{-1} = \frac{\partial z}{\partial w} \partial T(z,\bar{z}) T(z,\bar{z})^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} + \partial \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4.1.13}$$

此即

$$\widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}(w,\overline{w}) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(z,\bar{z}) \frac{\partial w^{\gamma}}{\partial z^{\lambda}} \cdot \frac{\partial z^{\mu}}{\partial w^{\alpha}} \cdot \frac{\partial z^{\nu}}{\partial w^{\beta}} + \frac{\partial^2 z^{\lambda}}{\partial w^{\alpha} \partial w^{\beta}} \cdot \frac{\partial w^{\gamma}}{\partial z^{\lambda}}. \tag{4.1.14}$$

由此可见，$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(z,\bar{z})$是 $\mathfrak{D}$ 上向量丛 $V(\mathfrak{D})$的联络. 设有 $\mathfrak{D}$ 的逆变量场 $\xi^{\alpha}(z)$（或称 $V(\mathfrak{D})$的截面），在双全纯映照 $w=\varphi(z)$下，有

$$\tilde{\xi}^{\alpha}(w) = \xi^{\beta}(z) \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial z^{\beta}},$$

则由(4.1.14)可知，由联络 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$定义的协变微分

$$\frac{\delta \xi^{\alpha}(z)}{\delta z^{\beta}} = \frac{\partial \xi^{\alpha}(z)}{\partial z^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(z,\bar{z}) \xi^{\gamma} \tag{4.1.15}$$

是一张量，即

$$\frac{\delta \tilde{\xi}^{\alpha}(w)}{\delta z^{\beta}} = \frac{\delta \xi^{\lambda}(z)}{\delta z^{\mu}} \cdot \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial z^{\lambda}} \cdot \frac{\partial z^{\mu}}{\partial w^{\beta}}. \tag{4.1.16}$$

有了线丛 $L(\mathfrak{D})$的联络 B_{α} 与向量丛 $V(\mathfrak{D})$的联络 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$，就可以定义张量积丛 $L(\mathfrak{D})\otimes V(\mathfrak{D})$的联络，这是由 B_{α} 与 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$定义的. 设 $\xi^{\alpha}(z)$是 $L(\mathfrak{D})\otimes V(\mathfrak{D})$的截面，即是权(1,0)的逆变向量，在双全纯映照 $w=\varphi(z)$，有如下关系：

$$\tilde{\xi}^{\alpha}(w) = \det \frac{\partial w}{\partial z} \xi^{\beta}(z) \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial z^{\beta}},$$

而 $\xi^{\alpha}(z)$对 z^{β} 的协变微分为

$$\frac{\delta \xi^{\alpha}(z)}{\delta z^{\beta}} = \frac{\partial \xi^{\alpha}(z)}{\partial z^{\beta}} + \xi^{\alpha}(z) B_{\beta}(z,\bar{z}) + \xi^{\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(z,\bar{z}), \tag{4.1.17}$$

易见有

$$\frac{\delta\tilde{\xi}^{\alpha}(w)}{\delta w^{\beta}}=\det\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w^{\mu}}{\partial z^{\beta}}\cdot\frac{\delta\xi^{\alpha}(z)}{\delta z^{\mu}}. \tag{4.1.18}$$

作者在引进协变微分的文章(文献[41])中,误用了"诱导(induced)"一词,至使读者可能产生误解.通常由向量丛的联络 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(z,\bar{z})$ 可以诱导出线丛 $L(\mathfrak{D})$ 的一种联络

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha}(z,\bar{z})=\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}(z,\bar{z})&=\frac{\partial T_{\beta\bar{\lambda}}(z,\bar{z})}{\partial z^{\alpha}}T^{\bar{\lambda}\beta}(z,\bar{z})\\&=\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\log\det T(z,\bar{z}).\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

这与作者先前定义的联络 $B_{\alpha}(z,\bar{z})=\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\log K(z,\bar{z})$ 不知是否相等,我们只知道 $\mathfrak{D}$ 是有界可递域时,两者是相等的,因为在此时 $K(z,\bar{z})=c\det T(z,\bar{z})$,$c$ 是一个正常数(见文献[35]).后来蒙伍鸿熙教授指出此点,因此作者在稍后的报告中(见文献[43])采用伍教授的意见,用两种协变微分的符号,以区别由 B_{α} 定义的线丛的联络与由 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 诱导的线丛的联络 Γ_{α} 的协变微分.但是实际上作者只用 B_{α} 作线丛 $L(\mathfrak{D})$ 的联络,而用 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 为向量丛 $V(\mathfrak{D})$ 的联络,而 $L(\mathfrak{D})\otimes V(\mathfrak{D})$ 的联络是用联络 B_{α} 与联络 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 构成的联络,这样就不必用两种协变微分的符号,$L(\mathfrak{D})\otimes V(\mathfrak{D})$ 的截面的协变微分是由(4.1.17)定义的,所以这里只用一种协变微分的符号.

如果仍用"诱导"一词的话,应该说清楚从联络

$$B_{\alpha}(z,\bar{z})=\frac{\partial\log K(z,\bar{z})}{\partial z^{\alpha}} \tag{4.1.20}$$

诱导出度量张量

$$T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})=\frac{\partial}{\partial\bar{z}^{\beta}}B_{\alpha}(z,\bar{z}),$$

再由此张量诱导出 Kähler 联络

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(z,\bar{z})=\frac{\partial T_{\alpha\bar{\lambda}}(z,\bar{z})}{\partial z^{\beta}}T^{\bar{\lambda}\gamma}(z,\bar{z}),$$

而不是通常微分几何学所说的"诱导是从联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(z,\bar{z})$ 诱导出联

络 $\Gamma_\alpha(z,\bar{z})=\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\log\det T(z,\bar{z})$.”

有了联络 $B_\alpha(z,\bar{z})$ 与 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z,\bar{z})$，就可以定义张量丛

$$[L(\mathfrak{D})]^p\otimes\overline{[L(\mathfrak{D})]^q}\otimes[V(\mathfrak{D})]^m\otimes\overline{[V(\mathfrak{D})]^n}$$
$$\otimes[V(\mathfrak{D})^{-1}]^r\otimes[\overline{V(\mathfrak{D})^{-1}}]^s \qquad (4.1.21)$$

的联络及其截面的协变变分. 这里 p 与 q 可以是任意实数，但 m, n, r, s 必须是非负整数. $V(\mathfrak{D})$ 是 $\mathfrak{D}$ 上逆变向量丛，$V(\mathfrak{D})^{-1}$ 是协变向量丛，$\overline{V(\mathfrak{D})}$ 是 $V(\mathfrak{D})$ 的复共轭向量丛.

顺便一提，按这里所用的“诱导”一词，还可以由联络诱导出曲率张量

$$R^\gamma_{\alpha\beta\bar{\mu}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{z}^\mu}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}, \qquad (4.1.22)$$

其中

$$R^\gamma_{\alpha\beta\bar{\mu}}=T^{\lambda\bar{\gamma}}R_{\lambda\alpha\beta\bar{\mu}}, \qquad (4.1.23)$$

而

$$R_{\lambda\alpha\beta\bar{\mu}}=-\frac{\partial^2}{\partial z^\beta\partial\bar{z}^\mu}T_{\alpha\bar{\lambda}}+\frac{\partial T_{\alpha\bar{\sigma}}}{\partial z^\beta}T^{\bar{\sigma}\tau}\frac{\partial T_{\tau\bar{\lambda}}}{\partial\bar{z}^\mu} \qquad (4.1.24)$$

是西曲率张量.

由 (4.1.21) 定义的丛空间的截面，我们称之为 (p,q) 权 $\begin{pmatrix} m & n \\ r & s\end{pmatrix}$-型张量 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_s}(z)$，若它对双全纯映照 $w=\varphi(z)$ 有如下关系：

$$\tilde{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_s}(w)=\left(\det\frac{\partial w}{\partial z}\right)^p\left(\det\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)^q$$
$$\times T^{\sigma_1\cdots\sigma_m\bar{\tau}_1\cdots\bar{\tau}_n}_{\gamma_1\cdots\gamma_r\bar{\nu}_1\cdots\bar{\nu}_s}(z)\frac{\partial w^{\alpha_1}}{\partial z^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial w^{\alpha_m}}{\partial z^{\sigma_m}}\overline{\frac{\partial w^{\beta_1}}{\partial z^{\tau_1}}}\cdots\overline{\frac{\partial w^{\beta_n}}{\partial z^{\tau_n}}}$$
$$\times\frac{\partial z^{\gamma_1}}{\partial w^{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial z^{\gamma_r}}{\partial w^{\lambda_r}}\overline{\frac{\partial z^{\nu_1}}{\partial w^{\mu_1}}}\cdots\overline{\frac{\partial z^{\nu_s}}{\partial w^{\mu_s}}}. \qquad (4.1.25)$$

由此可见，一张量是否带权，只有通过变换关系才能看得出来. 定义此张量对 z^α 的协变微分为

$$\frac{\delta}{\delta z^\alpha}T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_s}(z)=\frac{\partial}{\partial z^\alpha}T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_s}(z)$$

$$
\begin{aligned}
&+ pB_\alpha T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\sigma\alpha_{j+1}\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s}\Gamma^{\alpha_j}_{\sigma\lambda} \\
&- \sum_{j=1}^{r} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}\sigma\lambda_{j+1}\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s}\Gamma^{\sigma}_{\lambda_j\alpha},
\end{aligned}
\tag{4.1.26}
$$

及对 $\overline{z}^\beta$ 的协变微分为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\overline{z}^\beta} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s} \\
&= \frac{\partial}{\partial\overline{z}^\beta} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s} + q\,\overline{B_\beta} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s} \\
&+ \sum_{j=1}^{n} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_{j-1}\overline{\tau}\,\overline{\beta}_{j+1}\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s}\overline{\Gamma^{\beta_j}_{\tau\beta}} \\
&- \sum_{j=1}^{s} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_{j-1}\overline{\tau}\,\overline{\mu}_{j+1}\cdots\overline{\mu}_s}\overline{\Gamma^{\tau}_{\mu_j\beta}}.
\end{aligned}
\tag{4.1.27}
$$

不难证明以上两式分别是$\begin{pmatrix} m & n \\ r+1 & s \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} m & n \\ r & s+1 \end{pmatrix}$型的$(p,q)$权张量.

由(4.1.2)知 $\mathfrak{D}$ 的 Bergman 核函数 $K(z,\overline{z})$是权$(-1,-1)$的标量,即$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$型张量,根据协变微分的定义

$$
\frac{\delta K(z,\overline{z})}{\delta z^\alpha} = \frac{\partial K(z,\overline{z})}{\partial z^\alpha} - B_\alpha(z,\overline{z})K(z,\overline{z}) = 0,
$$

$$
\frac{\delta K(z,\overline{z})}{\delta\overline{z}^\beta} = \frac{\partial K(z,\overline{z})}{\partial\overline{z}^\beta} - \overline{B}_\beta K(z,\overline{z}) = 0.
$$

反之,如有$(-1,-1)$权的标量 $\Psi(z,\overline{z})$对 z^α 及对 $\overline{z}^\beta$ 的协变微分皆为0,即

$$
\frac{\partial\Psi}{\partial z^\alpha} = B_\alpha\Psi, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\overline{z}^\beta} = \overline{B_\beta}\Psi,
$$

此即

$$
\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\log\frac{\Psi(z,\overline{z})}{K(z,\overline{z})} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}^\beta}\log\frac{\Psi(z,\overline{z})}{K(z,\overline{z})} = 0,
$$

故 $\Psi(z,\bar{z})/K(z,\bar{z})$ 必须是常数.

引理4.1.1 $\mathfrak{D}$ 域中权$(-1,-1)$的标量 $\Psi(z,\bar{z})$ 对 z^α 及对 $\bar{z}^\beta$ 的协变微分皆为零的充要条件为 $\Psi(z,\bar{z})=cK(z,\bar{z})$ （c 是一常数）.

引理4.1.2 设 $\Psi(z,\bar{z})$ 是权(p,q)的标量，则

$$\frac{\delta^m\Psi(z,\bar{z})}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}} \text{ 对所有指标 } \alpha_1,\cdots,\alpha_m \text{ 对称，}$$

$$\frac{\delta^m\Psi(z,\bar{z})}{\delta \bar{z}^{\beta_1}\cdots\delta \bar{z}^{\beta_m}} \text{ 对所有指标 } \beta_1,\cdots,\beta_m \text{ 对称.}$$

证

$$\frac{\delta^2\Psi(z,\bar{z})}{\delta z^\alpha\delta z^\beta}=\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}+pB_\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial z^\beta}+pB_\beta\right)\Psi - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z^\gamma}+pB_\gamma\Psi\right)$$

这对指标 α、β 是对称的，因为 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$对 α、β 是对称的.

用归纳法假设，

$$\frac{\delta^m\Psi}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}} \text{ 对所有指标 } \alpha_1,\cdots,\alpha_m \text{ 对称 } (m\geqslant 2),$$

则

$$\frac{\delta^{m+1}\Psi}{\delta z^\alpha\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}-\frac{\delta^{m+1}\Psi}{\delta z^{\alpha_1}\delta z^\alpha\delta z^{\alpha_2}\cdots\delta z^{\alpha_m}} = \sum_{j=2}^m R^\lambda_{\alpha_j\alpha\alpha_1}\frac{\delta^{m-1}\Psi}{\delta z^{\alpha_2}\cdots\delta z^{\alpha_{j-1}}\delta z^\alpha\delta z^{\alpha_{j+1}}\cdots\delta z^{\alpha_m}},$$

其中

$$R^\lambda_{\mu\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Gamma^\lambda_{\mu\beta}-\frac{\partial}{\partial z^\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}+\Gamma^\nu_{\mu\beta}\Gamma^\lambda_{\nu\alpha}-\Gamma^\nu_{\mu\alpha}\Gamma^\lambda_{\nu\beta}. \tag{4.1.28}$$

由于 Bergman 度量是 Kähler 度量，由直接计算可知

$$R^\lambda_{\nu\alpha\beta}=0. \tag{4.1.29}$$

这证明了

$$\frac{\delta^{m+1}\Psi}{\delta z^\alpha\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}=\frac{\delta^{m+1}\Psi}{\delta z^{\alpha_1}\delta z^\alpha\delta z^{\alpha_2}\cdots\delta z^{\alpha_m}}.$$

据归纳法假设，

$\dfrac{\delta^m\Psi}{\delta z^{\alpha_1}\delta z^{\alpha_2}\cdots\delta z^{\alpha_m}}$对所有指标 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中可以任两指标互相交换.

由(4.1.29)知 α 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中任一指标可以互相交换,而归纳法假定(4.1.25)式中指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中任两指标可互相交换.因此

$$\frac{\delta^{m+1}\Psi}{\delta\bar{z}^{\alpha}\delta\bar{z}^{\alpha_1}\cdots\delta\bar{z}^{\alpha_m}}$$

的指标 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中任两个可以互相交换,引理证毕. ▌

不难证明,对张量积的协变微分适合普通微分的规律,即如 $T^{\cdots}_{\cdots}$ 是权(p,q)的$\begin{pmatrix} m & n \\ r & s\end{pmatrix}$型张量(为方便起见,把指标省略,而以 $T^{\cdots}_{\cdots}$代表此张量),$S^{\cdots}_{\cdots}$是权(p_1,q_1)的$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ r_1 & s_1\end{pmatrix}$型张量,则 $T^{\cdots}_{\cdots}S^{\cdots}_{\cdots}$ 是$(p+p_1,q+q_1)$权$\begin{pmatrix} m+m_1 & n+n_1 \\ r+r_1 & s+s_1\end{pmatrix}$型张量,其协变微分

$$\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}(T^{\cdots}_{\cdots}S^{\cdots}_{\cdots})=\left(\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}T^{\cdots}_{\cdots}\right)S^{\cdots}_{\cdots}+T^{\cdots}_{\cdots}\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}S^{\cdots}_{\cdots},$$

$$\frac{\delta}{\delta \bar{z}^{\beta}}(T^{\cdots}_{\cdots}S^{\cdots}_{\cdots})=\left(\frac{\delta}{\delta \bar{z}^{\beta}}T^{\cdots}_{\cdots}\right)S^{\cdots}_{\cdots}+T^{\cdots}_{\cdots}\frac{\delta}{\delta \bar{z}^{\alpha}}S^{\cdots}_{\cdots}.$$

此外,对 Bergman 度量张量

$$\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})=0,\quad \frac{\delta}{\delta \bar{z}^{\beta}}T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})=0. \tag{4.1.30}$$

设 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$,可知有

$$f(w)=\int_{\mathfrak{D}}f(z)K(w,\bar{z})\dot{z}, \tag{4.1.31}$$

其中 $w\in\mathfrak{D}$,$\dot{z}$ 是 C^N 的欧氏体积元素,由此知

$$\frac{\partial^m f(w)}{(\partial w^1)^{m_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}}=\int_{\mathfrak{D}}f(z)\frac{\partial^m K(w,\bar{z})}{(\partial w^1)^{m_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}}\dot{z},$$
$$m=m_1+\cdots+m_N. \tag{4.1.32}$$

由于对 $t\in\mathfrak{D}$,

$$\frac{\partial^n K(w,\bar{t})}{(\partial\bar{t}^1)^{n_1}\cdots(\partial\bar{t}^N)^{n_N}}\quad (n=n_1+\cdots+n_N)$$

对 w 为全纯并绝对值平方可积分，即属于 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$. 根据(4.1.32)有

$$\frac{\partial^{m+n}K(w,\bar{t})}{(\partial w^1)^{m_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}(\partial\bar{t}^1)^{n_1}\cdots(\partial\bar{t}^N)^{n_N}}$$

$$=\int_{\mathfrak{D}}\frac{\partial^n K(z,\bar{t})}{(\partial\bar{t}^1)^{n_1}\cdots(\partial\bar{t}^N)^{n_N}}\cdot\frac{\partial^m K(w,\bar{z})}{(\partial w^1)^{m_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}}\dot{z}. \quad (4.1.33)$$

这里可证明，把上式改为协变微分仍成立.

引理4.1.3　设 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$，则有

$$\frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}=\int_{\mathfrak{D}}f(z)\frac{\delta^m K(w,\bar{z})}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\dot{z}$$

及

$$\frac{\delta^{m+n}K(w,\bar{t})}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}\delta\bar{t}^{\beta_1}\cdots\delta\bar{t}^{\beta_n}}$$

$$=\int_{\mathfrak{D}}\frac{\delta^n K(z,\bar{t})}{\delta\bar{t}^{\beta_1}\cdots\delta\bar{t}^{\beta_n}}\cdot\frac{\delta^m K(w,\bar{z})}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\dot{z},$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_n=1,2,\cdots,N$.

证　由(4.1.32)

$$\int_{\mathfrak{D}}f(z)\frac{\delta K(w,\bar{z})}{\delta w^\alpha}$$

$$=\int_{\mathfrak{D}}f(z)\left[\frac{\partial K(w,\bar{z})}{\partial w^\alpha}-B_\alpha(w,\overline{w})K(w,\bar{z})\right]\dot{z}$$

$$=\frac{\partial f(w)}{\partial w^\alpha}-B_\alpha(w,\overline{w})f(w)$$

$$=\frac{\delta f(w)}{\delta w^\alpha}.$$

用归纳法，设引理的第一个公式在正整数 m 时成立，则

$$\int_{\mathfrak{D}}f(z)\frac{\delta^{m+1}K(w,\bar{z})}{\delta w^\alpha\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\dot{z}$$

$$=\int_{\mathfrak{D}}f(z)\left[\frac{\partial}{\partial w^\alpha}\frac{\delta^m K(w,\bar{z})}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}-B_\alpha(w,\overline{w})\frac{\delta^m K(w,\bar{z})}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^m\Gamma^\beta_{\alpha_j\alpha}(w,\overline{w})\frac{\delta^m K(w,\bar{z})}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_{j-1}}\delta w^\beta\delta w^{\alpha_{j+1}}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]\dot{z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial w^{\alpha}} \frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1} \cdots \delta w^{\alpha_m}} - B_{\alpha}(w,\overline{w}) \frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1} \cdots \delta w^{\alpha_m}}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \Gamma_{\alpha_j \alpha}^{\beta}(w,\overline{w}) \frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1} \cdots \delta w^{\alpha_{j-1}} \delta w^{\beta} \delta w^{\alpha_{j+1}} \cdots \delta w^{\alpha_m}}$$

$$= \frac{\delta^{m+1} f(w)}{\delta w^{\alpha} \delta w^{\alpha-1} \cdots \delta w^{\alpha_m}}.$$

这就证明了引理第一部分，由于

$$\frac{\delta^n K(w,\bar{t})}{\delta \bar{t}^{\alpha_1} \cdots \delta \bar{t}^{\alpha_n}},$$

当 $t \in \mathfrak{D}$ 固定时，对 w 属于 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$，只要以之代替引理第一部分的 $f(w)$，便可证明引理的第二部分.

取 t 固定，令

$$\psi_{m_1 \cdots m_N}(w) = \frac{\delta^m K(w,\bar{t})}{(\delta \bar{t}^1)^{m_1} \cdots (\delta \bar{t}^N)^{m_N}}. \tag{4.1.34}$$

这是属于 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$. 引理4.1.3的第二部分，即

$$\left[\frac{\delta^m \psi_{n_1 \cdots n_N}(w)}{(\delta w^1)^{m_1} \cdots (\delta w^N)^{m_N}} \right]_{w=t} = \int_{\mathfrak{D}} \psi_{n_1 \cdots n_N}(z) \overline{\psi_{m_1 \cdots m_N}(z)} \dot{z}. \tag{4.1.35}$$

注意一般情形

$$\left[\frac{\delta^{m+n} K(w,\bar{t})}{(\delta w^1)^{m_1} \cdots (\delta w^N)^{m_N} (\delta \bar{t}^1)^{m_1} \cdots (\delta \bar{t}^N)^{m_N}} \right]_{w=t}$$

$$\neq \frac{\delta^{m+n} K(t,\bar{t})}{(\delta t^1)^{m_1} \cdots (\delta t^N)^{m_N} (\delta \bar{t}^1)^{m_1} \cdots (\delta \bar{t}^N)^{m_N}},$$

后者根据引理4.1.1，恒为0，当 $m+n \geqslant 1$.

如 §3.5一样，把指标组 $(m_1, \cdots, m_N)$ 排列成单一次序，而把(4.1.34)的函数系排列成为函数系 $\{\psi_{\nu}(w)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$. 令

$$a_{\mu\nu} = \int_{\mathfrak{D}} \psi_{\mu}(z) \overline{\psi_{\nu}(z)} \dot{z}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,\cdots. \tag{4.1.36}$$

我们断言：$\{\psi_{\nu}(w)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$ 是线性独立的，即

$$\{\psi_{m_1 \cdots m_n}(w)\}_{m_1 + \cdots + m_N = m = 0,1,2,\cdots}$$

是线性独立的，即如有常数 $k_{n_1 \cdots n_N}$ 使得

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_N)\subseteq(m_1,\cdots,m_N)} k_{n_1,\cdots,n_N}\psi_{n_1,\cdots,n_N}(w) = 0, \qquad (4.1.37)$$

则必须 $k_{n_1\cdots n_N}=0$，当 $(n_1,\cdots,n_N)\subseteq(m_1,\cdots,m_N)$. 为了要证明，需要下面的引理：

引理4.1.4　(i) 设 $f_0(w)$ 是在 $\mathfrak{D}$ 中全纯的，且是绝对值平方可积的函数(即权为(0,0)的标量)，t 是 $\mathfrak{D}$ 中固定点，则 $f(w)=f_0(w)K(w,\bar{t})\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$，并且当 $m\geqslant1$时，

$$\left[\frac{\delta^m f(w)}{(\delta w^1)^{m_1}\cdots(\delta w^N)^{m_N}}\right]_{w=t} = \left[\frac{\delta^m f_0(w)}{(\delta w^1)^{m_1}\cdots(\delta w^N)^{m_N}}\right]_{w=t} K(t,\bar{t});$$

(ii) 若 $f_0(w)$ 是在 $\mathfrak{D}$ 内全纯的函数，则

$$\left[\frac{\delta^n f_0(w)}{(\delta w^1)^{n_1}\cdots(\delta w^N)^{n_N}}\right]_{w=t} = 0$$

$$(n_1\cdots + n_N = n = 0,1,\cdots,m-1)$$

的充要条件为

$$\left[\frac{\partial^n f_0(w)}{(\partial w^1)^{n_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}}\right]_{w=t} = 0$$

$$(n_1\cdots + n_N = n = 0,1,\cdots,m-1),$$

并且条件成立时，

$$\left[\frac{\delta^m f_0(w)}{(\delta w^1)^{m_1}\cdots(\delta w^N)^{m_N}}\right]_{w=t} = \left[\frac{\partial^m f_0(w)}{(\partial w^1)^{m_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}}\right]_{w=t}.$$

证　(i)

$$\frac{\delta f(w)}{\delta w^\alpha} = \frac{\partial f_0(w)}{\partial w^\alpha}K(w,\bar{t}) + f_0(w)\left[\frac{\partial K(w,\bar{t})}{\partial w^\alpha} - B_\alpha(w,\overline{w})K(w,\bar{t})\right],$$

由此式知

$$\left[\frac{\delta f(w)}{\delta w^\alpha}\right]_{w=t} = \frac{\partial f_0(t)}{\partial t^\alpha}K(t,\bar{t}).$$

假设已证

$$\left[\frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}=\left[\frac{\delta^m f_0(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}K(t,\bar{t}),$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^{m+1} f(w)}{\delta w^{\alpha}\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\\ &=\left(\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}-B_{\alpha}(w,\overline{w})\right)\frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{m}\Gamma^{\beta}_{\alpha_j\alpha}(w,\overline{w})\frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_{j-1}}\delta w^{\beta}\delta w^{\alpha_{j+1}}\cdots\delta w^{\alpha_m}}.\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\delta^{m+1} f(w)}{\delta w^{\alpha}\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}\\ &=\left[\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}\cdot\frac{\delta^m f_0(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}K(t,\bar{t}),\\ &\quad+\left[\frac{\delta^m f_0(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}\left\{\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial t^{\alpha}}-B_{\alpha}(t,\bar{t})K(t,\bar{t})\right\}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{m}\Gamma^{\beta}_{\alpha_j\alpha}(t,\bar{t})\left[\frac{\delta^m f_0(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_{j-1}}\delta w^{\beta}\delta w^{\alpha_{j+1}}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}K(t,\bar{t})\\ &=\left[\frac{\delta^{m+1} f_0(w)}{\delta w^{\alpha}\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}K(t,\bar{t}).\end{aligned}$$

这就证明了引理(i)部分.

(ii) 根据协变微分的定义,对全纯函数 $f_0(w)$ 有

$$\frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}=\frac{\partial^m f(w)}{\partial w^{\alpha_1}\cdots\partial w^{\alpha_m}}+\sum_{j=0}^{m-1}A^{\beta_1\cdots\beta_j}(w)\frac{\partial^j f(w)}{\partial w^{\beta_1}\cdots\partial w^{\beta_j}}.\quad(4.1.38)$$

这可以反解出来,

$$\frac{\partial^m f(w)}{\partial w^{\alpha_1}\cdots\partial w^{\alpha_m}}=\frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1} B^{\beta_1\cdots\beta_j}(w)\,\frac{\delta^j f(w)}{\delta w^{\beta_1}\cdots\delta w^{\beta_j}}. \tag{4.1.39}$$

由此可见，如果 $f_0(w)$的低于 m 阶在 t 点的偏微分为零，必有

$$\left[\frac{\delta^m f(w)}{\delta w^{\alpha_1}\cdots\delta w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}=\left[\frac{\partial^m f(w)}{\partial w^{\alpha_1}\cdots\partial w^{\alpha_m}}\right]_{w=t}. \tag{4.1.40}$$

反之，如 $f_0(w)$的低于 m 阶的协变微分在 t 点皆为0，则上式亦成立. 又上式即

$$\left[\frac{\delta^m f(w)}{(\delta w^1)^{m_1}\cdots(\delta w^N)^{m_N}}\right]_{w=t}=\left[\frac{\partial^m f(w)}{(\partial w^1)^{m_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}}\right]_{w=t}.$$

引理(ii)部分证毕. ▌

现在我们取 $f(w)=f_0(w)K(w,\bar{t})$，其中

$$f_0(w)=\frac{(w^1-t^1)^{m_1}\cdots(w^N-t^N)^{m_N}}{m_1!\cdots m_N!},$$

则

$$\left[\frac{\partial^n f(w)}{(\partial w^1)^{n_1}\cdots(\partial w^N)^{n_N}}\right]_{w=t}=\begin{cases}0, & 当(n_1,\cdots,n_N)\neq(m_1,\cdots,m_N);\\ 1, & 当(n_1,\cdots,n_N)=(m_1,\cdots,m_N).\end{cases}$$

根据引理4.1.4，

$$\begin{aligned}\left[\frac{\delta^n f(w)}{(\delta w^1)^{n_1}\cdots(\delta w^N)^{n_N}}\right]_{w=t}&=\left[\frac{\delta^n f_0(w)}{(\delta w^1)^{n_1}\cdots(\delta w^N)^{n_N}}\right]_{w=t}K(t,\bar{t})\\&=0, 当\ n_1+\cdots+n_N=n<m,\end{aligned}$$

并且

$$\left[\frac{\delta^m f(w)}{(\delta w^1)^{m_1}\cdots(\delta w^N)^{m_N}}\right]_{w=t}=\left[\frac{\partial^m f_0(w)}{(\partial w^1)^{m_1}\cdots(\partial w^N)^{m_N}}\right]_{w=t}K(t,\bar{t}).$$

以 $f(w)$乘(4.1.37)的复共轭，并在 $\mathfrak{D}$ 上积分之，且应用(4.1.32)有，

$$k_{m_1\cdots m_N}K(t,\bar{t})=0,$$

故必须 $k_{m_1\cdots m_N}=0$.

同法可证

$$k_{n_1\cdots n_N}=0,\text{当}(n_1,\cdots n_N)\subset(m_1,\cdots,m_N),$$

此即 $\{\psi_\nu(z)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$ 是线性独立的，因此 $\nu+1$ 阶 Hermite 方阵

$$H_\nu=\begin{pmatrix} a_{0\bar{0}} & a_{0\bar{1}} & \cdots & a_{0\bar{\nu}}\\ a_{1\bar{0}} & a_{1\bar{1}} & \cdots & a_{1\bar{\nu}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{\nu\bar{0}} & a_{\nu\bar{1}} & \cdots & a_{\nu\bar{\nu}} \end{pmatrix}\tag{4.1.41}$$

是正定的，令

$$H_\nu^{-1}=\begin{pmatrix} a_\nu^{\bar{0}0} & a_\nu^{\bar{0}1} & \cdots & a_\nu^{\bar{0}\nu}\\ a_\nu^{\bar{1}0} & a_\nu^{\bar{1}1} & \cdots & a_\nu^{\bar{1}\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_\nu^{\nu0} & a_\nu^{\nu1} & \cdots & a_\nu^{\nu\nu} \end{pmatrix}\tag{4.1.42}$$

及

$$\varphi_\nu(w)=\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\nu\alpha}\psi_\alpha(w),\tag{4.1.43}$$

则如§3.5一样，可证

$$\int_{\mathfrak{D}}\varphi_\mu(z)\,\overline{\varphi_\nu(z)}\dot{z}=\delta_{\mu\nu},\ \ \mu,\nu=0,1,2,\cdots.\tag{4.1.44}$$

若 μ 对应的指标组为 $(m_1,\cdots,m_N)$，ν 对应的指标组为 $(n_1,\cdots,n_N)$，并令

$$\frac{\delta\varphi_\mu(w)}{(\delta w)^\nu}=\frac{\delta^n\varphi_{m_1\cdots m_N}(w)}{(\delta w^1)^{n_1}\cdots(\delta w^N)^{n_N}},\tag{4.1.45}$$

则如证(3.5.31)一样，由引理4.1.3可得出

$$\left[\frac{\delta\varphi_\mu(w)}{(\delta w)^\nu}\right]_{w=t}=\begin{cases}0,\ \text{当}\ \nu<\mu;\\ \dfrac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}},\ \text{当}\ \mu=\nu.\end{cases}\tag{4.1.46}$$

我们已经知道，当 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$ 时，则有展开式

$$f(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(w),$$

$$a_\nu=\int_{\mathfrak{D}}f(z)\,\overline{\varphi_\nu(z)}\dot{z},\tag{4.1.47}$$

这在 $w\in\mathfrak{D}$ 的任一紧子集绝对并一致收敛(见文献[37]第Ⅱ章).

由引理4.1.3与(4.1.34)、(4.1.43)知

$$a_\nu=\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\bar{\nu}\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}\overline{a_\nu^{\bar{\nu}\alpha}}\int_{\mathfrak{D}}f(z)\,\overline{\psi_\alpha(z)}\dot{z}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\nu\nu}}}\sum_{\alpha=0}^{\nu}a_\nu^{\bar{\alpha}\nu}\left[\frac{\delta f(w)}{(\delta w)^\alpha}\right]_{w=t},$$

因此

$$f(w)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left[\frac{\delta f(w)}{(\delta w)^\alpha}\right]_{w=t}\Psi_\alpha(w,t),$$

其中

$$\Psi_\alpha(w,t)=\sum_{\nu=\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_\nu^{\bar{\nu}\nu}}}a_\nu^{\bar{\alpha}\nu}\varphi_\nu(w).\tag{4.1.48}$$

根据(4.1.46),有

$$\sqrt{a_\nu^{\bar{\nu}\nu}}=\left[\frac{\delta\varphi_\nu(w)}{(\delta w)^\nu}\right]_{w=t}^{-1}.$$

定理4.1.5　设 $\mathfrak{D}$ 是 C^N 中有界域,t 在 $\mathfrak{D}$ 中固定,在 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$ 中可选取一组完备的正交就范函数系 $\{\varphi_\nu(w,t)\}$,使得对任一 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$ 有

$$f(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{\delta f(z)}{(\delta z)^\nu}\right]_{z=t}\Psi_\nu(w,t)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=m}\left[\frac{\delta^m f(z)}{(\delta z^1)^{m_1}\cdots(\delta z^N)^{m_N}}\right]_{z=t}\times\Psi_{m_1\cdots m_N}(w,t),$$

式中 $\Psi_\alpha(w,t)$ 由(4.1.48)定义;$\varphi_{m_1\cdots m_N}(w,t)$ 适合

$$\left[\frac{\delta\varphi_{\mu}(w,t)}{(\delta w)^{\nu}}\right]_{w=t}$$
$$=\left[\frac{\delta^{m}\varphi_{n_1\cdots n_N}(w,t)}{(\delta w^1)^{m_1}\cdots(\delta w^N)^{m_N}}\right]_{w=t}$$
$$=\begin{cases}0, & \text{当}(n_1,\cdots,n_N)\supset(m_1,\cdots,m_N),\\ \text{正数}, & \text{当}(n_1,\cdots,n_N)=(m_1,\cdots,m_N).\end{cases}$$

此外,级数当 w 在 $\mathfrak{D}$ 的任一紧子集中 $f(w)$绝对并一致收敛.

这个定理可以称之为协变级数展开定理,它的特点是：1) 不论在什么 $t\in\mathfrak{D}$ 的点展开,此级数在 $\mathfrak{D}$ 任一点 w 皆收敛；2) 在双全纯映照下,这级数展开是协变的,因为我们用的是协变微分来构造函数系$\{\varphi_{\nu}(w,t)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$,不论在哪一个有界域对 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$的级数展开,形式都一样；3) 根据(3.1.46)与(3.1.48),有

$$\left[\frac{\delta\Psi_{\alpha}(w)}{(\delta w)^{\beta}}\right]_{w=t}=\begin{cases}0, & \text{当 }\beta<\alpha;\\ 1, & \text{当 }\beta=\alpha.\end{cases}$$

此即

$$\left[\frac{\delta\Psi_{n_1\cdots n_N}(w)}{(\delta w)^{m_1\cdots m_N}}\right]_{w=t}=\begin{cases}0, & \text{当}(m_1,\cdots,m_N)\subset(n_1,\cdots,n_N);\\ 1, & \text{当}(m_1,\cdots,m_N)=(n_1,\cdots,n_N).\end{cases}$$

例 取 $\mathfrak{D}$ 为单位球 B^N,取 $t=0$为原点,则

$$\varphi_{m_1,\cdots,m_N}(w,0)=\frac{1}{\sqrt{c_{m_1,\cdots,m_N}}}(w^1)^{m_1}\cdots(w^N)^{m_N},$$
$$c_{m_1,\cdots,m_N}=\int_{\mathfrak{D}}|w^1|^{2m_1}\cdots|w^N|^{2m_N}\dot{w}.$$

则展开式为

$$f(w)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=m}\frac{\left[\frac{\partial^m f(z)}{(\partial z^1)^{m_1}\cdots(\partial z^N)^{m_N}}\right]_{z=0}}{m_1!\cdots m_N!}$$
$$\times(w^1)^{m_1}\cdots(w^N)^{m_N}.$$

这是通常的 Taylor 级数展开在整个单位球收敛,但在 $t\in B^N$ 的点的 Taylor 级数展开

$$f(w)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=m}\frac{\left[\dfrac{\partial^m f(z)}{(\partial z^1)^{m_1}\cdots(\partial z^N)^{m_N}}\right]_{z=t}}{m_1!\cdots m_N!}$$

$$\times(z^1-t^1)^{m_1}\cdots(z^N-t^N)^{m_N}$$

只在 B^N 中以 t 为中心点半径为$1-|t|$的球内收敛. 按定理的展开,则要计算核函数各阶协变微分的值.

我们已知

$$K(w,\bar{z})=\frac{1}{v(B^N)(1-wz^{\dagger})^{N+1}},$$

其中 $V(B^N)$为单位球 B^N 的体积. 易见

$$\left[\frac{\delta^m K(w,\bar{t})}{(\delta\bar{t}^1)^{m_1}\cdots(\delta\bar{t}^N)^{m_N}}\right]_{t=0}$$

$$=\left[\frac{\partial^m K(w,\bar{t})}{(\partial\bar{t}^1)^{m_1}\cdots(\partial\bar{t}^N)^{m_N}}\right]_{t=0}$$

$$=\frac{m_1!\cdots m_N!}{c_{m_1\cdots m_N}}(w^1)^{m_1}\cdots(w^N)^{m_N}.$$

令

$$w=\psi(z,t)=\sqrt{1-|t|^2}\,\frac{z-t}{1-zt^{\dagger}}[I+t^{\dagger}t]^{-\frac{1}{2}},\tag{4.1.49}$$

为 B^N 的全纯自同构,把 $z=t$ 映为 $w=0$,因此

$$\frac{\delta^m K(z,\bar{t})}{\delta\bar{t}^{\alpha_1}\cdots\delta\bar{t}^{\alpha_m}}$$

$$=\det\frac{\partial w}{\partial z}\left[\det\overline{\frac{\partial s}{\partial t}}\cdot\frac{\delta^m K(w,\bar{s})}{\delta\bar{s}_1^{\beta_1}\cdots\delta\bar{s}^{\beta_m}}\cdot\overline{\frac{\partial s^{\beta_1}}{\partial t^{\alpha_1}}}\cdots\overline{\frac{\partial s^{\beta_m}}{\partial t^{\alpha_m}}}\right]_{s=0},$$

故

$$\frac{\delta^m K(z,\bar{t})}{(\delta\bar{t}^1)^{m_1}\cdots(\delta\bar{t}^N)^{m_N}}$$

$$=b_{m_1\cdots m_N}(t)[\psi^1(z,t)]^{m_1}\cdots[\psi^N(z,t)]^{m_N}\det\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}.$$

B^N 是 Reinhart 域,故

$$\varphi_{m_1\cdots m_N}(z,t) = a_{m_1\cdots m_N}\frac{\delta^m K(z,\bar{t})}{(\delta\bar{t}^1)^{m_1}\cdots(\delta\bar{t}^N)^{m_N}}$$

$$= a_{m_1\cdots m_N}b_{m_1\cdots m_N}(t)[\psi^1(z,t)]^{m_1}\cdots$$

$$\times[\psi^N(z,t)]^{m_N}\det\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}, \tag{4.1.50}$$

其中 $a_{m_1\cdots m_N}$ 为常数，$b_{m_1\cdots m_N}(t)$ 只与 t 有关，故 $\varphi_{m_1\cdots m_N}(z,t)$ 是 z 的有理函数，其具体形式可以由(4.1.49)式计算出来. 但为篇幅所限，只看 $N=1$ 的情形. 此时，

$$\varphi_m(z)=\frac{(z-t)^m}{\sqrt{a_m(t)}(1-z\bar{t})^{m+2}},$$

$$a_m=\int_{|z|<1}\frac{|z-t|^{2m}}{|1-z\bar{t}|^{2m+4}}\dot{z}, \tag{4.1.51}$$

$$\left[\frac{\delta^m\varphi_m(z)}{\delta z^m}\right]_{z=t}=\frac{m!}{\sqrt{a_m(t)}}\cdot\frac{1}{(1-|t|^2)^{m+2}}, \tag{4.1.52}$$

因此有 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$ 的展开式

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\delta^m f(t)}{\delta t^m}\left(\frac{1-|t|^2}{1-z\bar{t}}\right)^{m+2}(z-t)^m, \tag{4.1.53}$$

这是在圆盘任一点 z 皆收敛的，不仅在 $|z-t|<1-|t|$ 收敛. 此外，

$$\frac{\delta^0 f(z)}{\delta z^0}=f(z),$$

$$\frac{\delta^m f(z)}{\delta z^m}=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial z}+j\frac{2\bar{z}}{1-|z|^2}\right)f(z),\ m=1,2,\cdots. \tag{4.1.54}$$

估计定理4.1.5协变展开的系数的值，即要估计

$$\frac{\delta^m f(z)}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}$$

的值，这是多个指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 对称的(引理4.1.2)，应该是估计值

$$\left|\frac{\delta^m f(z)}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}u^{\alpha_1}\cdots u^{\alpha_m}\right|$$

的值，其中 u^α 是单位向量. 但为了计算方便，取

$$u^\alpha = \frac{\mathrm{d}z^\alpha}{\mathrm{d}s} \text{ 适合 } T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})u^\alpha\overline{u}^\beta = 1, \tag{4.1.55}$$

其中 $\mathrm{d}s^2$ 是 Bergman 度量，它的几何意义是在 $z\in\mathfrak{D}$ 点出发的测地线在 z 点的切向量.

令

$$\frac{\delta^m}{\delta s_z^m} = \frac{\mathrm{d}z^{\alpha_1}}{\mathrm{d}s}\cdots\frac{\mathrm{d}z^{\alpha_m}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\delta^m}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}. \tag{4.1.56}$$

定理4.1.6　设 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$，则有

$$\left|\frac{\delta^m f(z)}{\delta s_z^m}\right|^2 \leqslant \|f\|^2\int_{\mathfrak{D}}\left|\frac{\delta^m K(z,\overline{w})}{\delta s_z^m}\right|^2\dot{w},$$

其中 $\|f\|$ 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$ 的范数，即

$$\|f\|^2 = \int_{\mathfrak{D}}|f(w)|^2\dot{w}.$$

证　由引理4.1.3的第一部分知

$$\frac{\delta^m f(z)}{\delta s_z^m} = \int_{\mathfrak{D}} f(w)\frac{\delta^m K(z,\overline{w})}{\delta s_z^m}\dot{w},$$

应用积分的 Schwarz 不等式，便得

$$\left|\frac{\delta^m f(z)}{\delta s_z^m}\right|^2 \leqslant \|f\|^2\int_{\mathfrak{D}}\left|\frac{\delta^m K(z,\overline{w})}{\delta s_z^m}\right|^2\dot{w}.$$

定理证毕.　▌

这个证明在定义好协变微分之后，就变得如此简单了.

如果 $f_0(w)$ 是 $\mathfrak{D}$ 中有界的全纯函数，即

$$|f_0(w)| \leqslant M,\ M \text{ 为正数}, \tag{4.1.57}$$

则对任一固定点 $z\in\mathfrak{D}$，$f_0(w)K(w,\bar{z})\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$，根据引理4.1.4，有

$$\left[\frac{\delta^m f(w)}{\delta s_w^2}\right]_{w=z} = \frac{\delta^m f_0(z)}{\delta s_z^m}K(z,\bar{z}). \tag{4.1.58}$$

由于

$$\|f\|^2 = \int_{\mathfrak{D}} |f_0(w)K(w,\bar{z})|^2 \dot{w}$$
$$\leqslant M^2 \int_{\mathfrak{D}} K(w,\bar{z})K(z,\overline{w})\dot{w}$$
$$= M^2 K(z,\bar{z}), \tag{4.1.59}$$

从定理4.1.6得出如下定理：

定理4.1.7　如 $f_0(w)$ 是在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数，适合 $|f_0(w)| \leqslant M$ （M 为正数），则有

$$\left|\frac{\delta^m f_0(z)}{\delta s_z^m}\right|^2 \leqslant M^2 \int_{\mathfrak{D}} \left|\frac{\delta^m K(z,\overline{w})}{\delta s_z^m}\right|^2 \dot{w}.$$

令

$$f_0(w) = \sum_{j=1}^m v_j f_0^j(w),\ \sum_{j=1}^m |v_j|^2 = 1, \tag{4.1.60}$$

其中 $f_0(w)$ 是在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数，适合当 $w \in \mathfrak{D}$ 时，

$$\sum_{j=1}^m |f_0^j(w)|^2 \leqslant M^2 \quad (M\text{ 为正数}). \tag{4.1.61}$$

它的几何意义即映照

$$w \mapsto (f_0^1(w), \cdots, f_0^m(w)),$$

是把 $\mathfrak{D}$ 映入半径为 M 的球 $\mathrm{B}^m(M)$ 的全纯映照，由 Schwarz 不等式

$$|f_0(z)|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^m |v_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^m |f_0^j(w)|^2\right) \leqslant M^2. \tag{4.1.62}$$

由于

$$\frac{\delta^m f_0(z)}{\delta s_z^m} = \sum v_j \frac{\delta^m f_0^j(z)}{\delta s_z^m}. \tag{4.1.63}$$

应用定理4.1.7可得如下定理：

定理4.1.8　当 $f_0^j(z)$ $(j=1,\cdots,m)$ 在 $\mathfrak{D}$ 全纯，适合 $\sum_{j=1}^m |f_0^j(z)|^2 \leqslant M^2$，

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta^n f_0^j(z)}{\delta s_z^n}v_j\right|^2\leqslant M^2\int_{\mathfrak{D}}\left|\frac{\delta^n K(z,\overline{w})}{\delta s_z^n}\right|^2\dot{w},$$

其中 v_j 是任一向量,适合 $\sum_{j=1}^{m}|v_j|^2=1$. 特别取

$$v_j=\overline{\frac{\delta^n f_0^j(z)}{\delta s_z^n}}\Bigg/\left[\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\delta^n f_0^k(z)}{\delta s_z^n}\right|^2\right]^{1/2},$$

有

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\delta^n f_0^j(z)}{\delta s_z^n}\right|^2\leqslant M^2\int_{\mathfrak{D}}\left|\frac{\delta^n K(z,\overline{w})}{\delta s_z^n}\right|^2\dot{w}.$$

如上面说过,此定理可看作是把 $\mathfrak{D}$ 映入 $B^m(m)$ 的全纯映照函数的估值,也可考虑把 $\mathfrak{D}$ 映入其他复流形时的情形. 问题是给与一复流形 $\mathfrak{M}$,怎样定义 $\mathfrak{D}$ 中的映照函数 f_0^j 才知道

$$z\mapsto(f_0^1(z),\cdots,f_0^m(z))$$

是把 $\mathfrak{D}$ 映入 $\mathfrak{M}$ 的映照.

Bergman 定义代表映照

$$u^\alpha=\varphi^\alpha(w)=T^{\bar{\beta}\alpha}(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial\bar{z}^\beta}\log\frac{K(w,\bar{z})}{K(z,\bar{z})}. \quad (4.1.64)$$

如 § 3.6所说,$K(w,\bar{z})$ 可能有零点,故一般而言,这是亚纯映照,不一定全纯. 但是

$$\varphi^\alpha(w)K(w,\bar{z})$$
$$=T^{\bar{\beta}\alpha}(z,\bar{z})\left[\frac{\partial K(w,\bar{z})}{\partial\bar{z}^\beta}-\frac{K(w,\bar{z})}{K(z,\bar{z})}\cdot\frac{\partial K(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}^\beta}\right],$$

(4.1.65)

当 z 固定,对 w 属于 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$,因此

$$f(w)=\sum_{\alpha=1}^{N}v_\alpha\varphi^\alpha(w)K(w,\bar{z})\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D}), \quad (4.1.66)$$

其中 v_α 是任意复数,适合 $\sum_{\alpha=1}^{N}|v_\alpha|^2=1$, 因此可应用定理4.1.6. 根据引理4.1.4,有

$$\left[\frac{\delta^n f(w)}{\delta s_w^m}\right]_{w=z}=\sum_{\alpha=1}^{N}v_\alpha\frac{\delta^n\varphi^\alpha(z)}{\delta s_z^n}K(z,\bar{z}). \quad (4.1.67)$$

现在要计算

$$\|f(w)\|^2=\int_{\mathfrak{D}}\left|\sum_{\alpha=1}^{N}v_\alpha\varphi^\alpha(w)K(w,\bar{z})\right|^2\dot{w}$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}v_\alpha\bar{v}_\beta T^{\lambda\alpha}(z,\bar{z})T^{\bar{\beta}\mu}(z,\bar{z})$$

$$\times\int_{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial K(w,\bar{z})}{\partial\bar{z}^\lambda}-\frac{K(w,\bar{z})}{K(z,\bar{z})}\frac{\partial K(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}^\lambda}\right]$$

$$\times\left[\frac{\partial K(z,\overline{w})}{\partial z^\mu}-\frac{K(z,\overline{w})}{K(z,\bar{z})}\cdot\frac{\partial K(z,\bar{z})}{\partial z^\mu}\right]\dot{w}$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}v_\alpha\bar{v}_\beta T^{\lambda\alpha}(z,\bar{z})T^{\bar{\beta}\mu}(z,\bar{z})$$

$$\times\left[\frac{\partial^2K(z,\bar{z})}{\partial z^\mu\partial\bar{z}^\lambda}-\frac{1}{K(z,\bar{z})}\cdot\frac{\partial K(z,\bar{z})}{\partial z^\mu}\cdot\frac{\partial K(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}^\lambda}\right]$$

$$=K(z,\bar{z})T^{\bar{\beta}\alpha}(z,\bar{z})\bar{v}_\beta v_\alpha.\tag{4.1.68}$$

应用定理4.1.6及(4.1.67)、(4.1.68)，得出如下定理：

定理4.1.9 设 $w^\alpha=\varphi^\alpha(w)$是把 z 点映为原点的代表映照，则有

$$\left|\frac{\delta^m\varphi^\alpha(w)}{\delta s_w^m}v_\alpha\right|_{w=z}^2\leqslant T^{\bar{\beta}\alpha}(z,\bar{z})v_\alpha\bar{v}_\beta\int_{\mathfrak{D}}\left|\frac{\delta^m K(z,\overline{w})}{\delta s_z^m}\right|^2\dot{w}$$

对任意的非零向量 v_α.

现在的关键是要计算积分

$$\int_{\mathfrak{D}}\frac{\delta^m K(z,\overline{w})}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}\cdot\frac{\delta^m K(w,\bar{z})}{\delta\bar{z}^{\beta_1}\cdots\delta\bar{z}^{\beta_m}}\dot{w}.\tag{4.1.69}$$

当 $m=1$时，

$$\frac{\delta K(z,\overline{w})}{\delta z^\alpha}=\left[\frac{\partial}{\partial z^\alpha}-B_\alpha(z,\bar{z})\right]K(z,\overline{w}),$$

故

$$\int_{\mathfrak{D}}K(z,\overline{w})\frac{\delta K(w,\bar{z})}{\delta\bar{z}^\beta}\dot{w}=0.\tag{4.1.70}$$

$$\int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial K(z,\overline{w})}{\partial z^{\alpha}} \cdot \frac{\delta K(w,\bar{z})}{\delta \bar{z}^{\beta}} \dot{w} = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \int_{\mathfrak{D}} K(z,\overline{w}) \frac{\delta K(w,\bar{z})}{\delta \bar{z}^{\beta}} \dot{w}$$

$$- \int_{\mathfrak{D}} K(z,\overline{w}) \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \cdot \frac{\delta K(w,\bar{z})}{\delta \bar{z}^{\beta}} \dot{w}$$

$$= \int_{\mathfrak{D}} K(z,\overline{w}) T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z}) K(w,\bar{z}) \dot{w}$$

$$= K(z,\bar{z}) T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z}). \qquad (4.1.71)$$

定理4.1.6化为如下定理:

定理4.1.10　如 $f \in \mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$,则

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta f}{\delta z^{\alpha}} \mathrm{d} z^{\alpha} \right|^2 \leqslant \|f\|^2 K(z,\bar{z}) \mathrm{d} s^2,$$

其中 $\mathrm{d}s^2$ 为 Bergman 度量.

定理4.1.7化为如下定理:

定理4.1.11　如 $f_0(z)$ 是 $\mathfrak{D}$ 中全纯函数,并且

$$|f_0(z)| \leqslant M,$$

则

$$|\mathrm{d} f_0(z)|^2 \leqslant M^2 \mathrm{d} s^2.$$

特别取 $M=1$,令 $\mathfrak{F}_0(\mathfrak{D})$ 为在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数类,其中的函数 f 适合 $f(0)=0, |f(w)|<1$,则由此定理得出

$$\sup_{f_0 \in \mathfrak{F}_0(\mathfrak{D})} |\mathrm{d} f_0(z)| \leqslant \mathrm{d} s. \qquad (4.1.72)$$

上式左边就是 Reiffen[61]在1968年定义的 Carathéo*d*ory 微分度量.

系4.1.12　有界域 $\mathfrak{D}$ 的 Carathéo*d*ory 微分度量恒不大于 Bergman 度量.

这是 Hahn[21]在1978年利用作者[36]在1957年发表的下面的定理的特殊情况(即定理4.1.11)来证明的:定理4.1.8当 $n=1$ 时,可写作

$$\sum_{j=1}^{m} |\mathrm{d} f_0^j(z)|^2 \leqslant M^2 \mathrm{d} s^2. \qquad (4.1.73)$$

把它写为矩阵的形式,即有以下定理:

定理4.1.13 设 $f_0^j(z)(j=1,\cdots,m)$ 在 $\mathfrak{D}$ 内全纯，并适合

$$\sum_{j=1}^{m} f_0^j(z)|^2 \leqslant M^2,$$

则有

$$\left[\frac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^m)}{\partial(z^1,\cdots,z^N)}\right]\cdot\left[\frac{\partial(f_0^1,\cdots,f_0^m)}{\partial(z^1,\cdots,z^N)}\right]^{\dagger} \leqslant M^2T(z,\bar{z}).$$

作者当时称此定理为 Schwarz 引理.

由(4.1.64)知

$$\begin{aligned}\frac{\delta\varphi^{\alpha}(w)}{\delta s_w}v_{\alpha} &= \frac{\mathrm{d}w^{\beta}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\partial\varphi^{\alpha}(w)}{\partial w^{\beta}}v_{\alpha}\\ &= \frac{\mathrm{d}w^{\beta}}{\mathrm{d}s}T^{\bar{\lambda}\alpha}(z,\bar{z})\ \frac{\partial^2\log K(w,\bar{z})}{\partial w^{\beta}\partial\bar{z}^{\lambda}}v_{\alpha},\end{aligned}$$

故有

$$\left[\frac{\delta\varphi^{\alpha}(w)}{\delta s_w}v_{\alpha}\right]_{w=z} = \frac{\mathrm{d}z^{\beta}}{\mathrm{d}s}v_{\beta}. \tag{4.1.74}$$

当 $m=1$时，由(4.1.74)知定理4.1.9化为

$$\left|v_{\alpha}\frac{\mathrm{d}z^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|^2 \leqslant T^{\bar{\beta}\alpha}(z,\bar{z})\ \overline{v_{\beta}}v_{\alpha}.$$

定理4.1.14 有界域 $\mathfrak{D}$ 的 Bergman 度量方阵适合

$$[T(z,\bar{z})]^{-1} \geqslant \frac{1}{uT(z,\bar{z})u^{\dagger}}u^{\dagger}\,u,$$

其中 $u=(u^1,\cdots,u^N)$是单位向量，即 $uu^{\dagger}=1$；特别是

$$uT(z,\bar{z})u^{\dagger}\ \cdot u[T(z,\bar{z})]^{-1}u^{\dagger}\ \geqslant 1.$$

当 $m=2$时，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathfrak{D}}\frac{\delta^2K(z,\bar{w})}{\delta z^{\alpha}\delta z^{\beta}}\cdot\frac{\delta^2K(w,\bar{z})}{\delta\bar{z}^{\lambda}\delta\bar{z}^{\mu}}\dot{w}\\ &= K(z,\bar{z})[T_{\alpha\bar{\lambda}}(z,\bar{z})T_{\beta\bar{\mu}}(z,\bar{z})\\ &\quad + T_{\alpha\bar{\mu}}(z,\bar{z})T_{\beta\bar{\lambda}}(z,\bar{z}) - R_{\bar{\lambda}\alpha\beta\bar{\mu}}(z,\bar{z})].\end{aligned} \tag{4.1.75}$$

此公式的证明繁而不难，因篇幅关系，这里从略. 有兴趣的读者可

参阅文献[41]. 此时定理4.1.6化为如下定理：

定理4.1.15　设 $f\in\mathfrak{L}^2(\mathfrak{D})$，则有

$$\left|\frac{\delta^2 f(z)}{\delta z^\alpha \delta z^\beta}\cdot\frac{\mathrm{d}z^\alpha}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}z^\beta}{\mathrm{d}s}\right|^2\leqslant\|f\|^2K(z,\bar z)\left[2-\omega\left(z,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\right],$$

其中

$$\omega\left(z,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{R_{\bar\lambda\alpha\beta\bar\mu}\mathrm{d}z^\alpha\mathrm{d}z^\beta\,\overline{\mathrm{d}z}^\lambda\,\overline{\mathrm{d}z}^\mu}{(T_{\sigma\bar\tau}\mathrm{d}z^\sigma\,\overline{\mathrm{d}z}^\tau)^2}$$

是 z 点的酉曲率(全纯截曲率).

系4.1.16　C^N 的有界域 $\mathfrak{D}$ 的 Bergman 度量的酉曲率恒小于2.

$N=2$时，这是 Fuks 在1937年的结果. 一般的 N 是华罗庚在1954年的结果[22].

定理4.1.17　设 $f^j(z)(j=1,\cdots,m)$是在 $\mathfrak{D}$ 全纯的函数，并适合

$$\sum_{j=1}^m|f^j(z)|^2\leqslant M^2,$$

则有

$$\left|\frac{\delta^2 f^j(z)}{\delta z^\alpha\delta z^\beta}u^\alpha u^\beta\right|^2\leqslant M^2\{2[T_{\alpha\bar\beta}(z,\bar z)u^\alpha\bar u^\beta]^2$$
$$-R_{\bar\lambda\alpha\beta\bar\mu}(z,\bar z)u^\alpha u^\beta\bar u^\lambda\bar u^\mu\},$$

其中 u^α 是任意的向量.

对于代表映照(4.1.64)易知

$$\frac{\delta\varphi^\alpha(w)}{\delta w^\beta}=\frac{\partial\varphi^\alpha(w)}{\partial w^\beta}=T^{\bar\lambda\alpha}(z,\bar z)T_{\beta\bar\lambda}(w,\bar z),$$

故
$$\frac{\delta^2\varphi^\alpha(w)}{\delta w^\gamma\partial w^\beta}=T^{\bar\lambda\alpha}(z,\bar z)\left[\frac{\partial T_{\beta\bar\lambda}(w,\bar z)}{\partial w^\gamma}-\Gamma^\mu_{\gamma\beta}(w,\bar w)T_{\mu\bar\lambda}(w,\bar z)\right]$$
$$=T^{\bar\lambda\alpha}(z,\bar z)T_{\mu\bar\lambda}(w,\bar z)[\Gamma^\mu_{\beta\gamma}(w,\bar z)-\Gamma^\mu_{\beta\gamma}(w,\bar w)].\tag{4.1.76}$$

由此知

$$\left[\frac{\delta^2\varphi^\alpha(w)}{\delta w^\beta\delta w^\gamma}\right]_{w=z}=0,\tag{4.1.77}$$

故我们无需对它进行估值了.

§4.2 用Cauchy-Fantappiè公式推导华罗庚的Cauchy公式

华罗庚[23]建立的四类典型的Cauchy公式,最初是由典型域$\mathfrak{R}$的特征流形$\mathfrak{C}$上构造在$\mathfrak{R}$内全纯,在$\overline{\mathfrak{R}}$上连续的完备的对$\mathfrak{C}$正交就范函数系$\{\varphi_\nu(z)\}_{\nu=1,2,\cdots}$,然后再把这些函数系加起来,即$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(w)\overline{\varphi(z)}$,得出Cauchy-Szegö核,这需要惊人的技巧.虽然后来可以从Poisson核得出Cauchy-Szegö核,而Poisson核可以从$\mathfrak{R}$的自同构群在$\mathfrak{C}$上的函数行列式得出来(见《典》著§5.3).为什么又要从Cauchy-Fantappiè公式再来推导呢?原因是Norquet[59]利用Cauchy-Fantappiè公式推导出多种Cauchy公式,正如作者在文献[39]中开头所说的多复变数中的Cauchy公式有许多种,能否由一个公式统一起来呢?所以就典型域作一尝试.现在看来,问题比较清楚了,大抵C^m中有界域的Cauchy公式可以这样做,因为正如上面一章所见,归根到底这是与C^m的Green函数有关,而其他Kähler流形上的Cauchy公式就未必能够如此了,因为Green函数不同.此外,在作者上述文章中所引进的全纯Leray映照及计算方法对了解Cauchy-Fantappiè公式大有用处,故这里还是先从Leray的Cauchy-Fantappiè公式推导出典型域的Cauchy公式开始.

设$\mathfrak{D}$是C^N中一有界域,其边界是逐段光滑的,$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\in C^r$,$\tilde{c}$是$C^r\times C^N$中的$2N-1$维循环,它是由$C^r$中的一个$r-1$维循环$\tilde{c}_1$与$\partial\mathfrak{D}$中一个$2N-r$维循环$\tilde{c}_2$组成,即

$$\tilde{c}=\tilde{c}_1\times\tilde{c}_2. \tag{4.2.1}$$

设$\psi_{\alpha j}(z)$是在$\tilde{c}_2$的邻域中可微分函数,令

$$\xi_0=-z^\alpha\xi_\alpha=-\sum_{\alpha=1}^{N}z^\alpha\xi_\alpha,$$

$$\xi_\alpha = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \psi_{\alpha j}(z),\ \alpha = 1, \cdots, N. \tag{4.2.2}$$

显然有

$$Q: \xi_0 + \sum_{\alpha=1}^{N} z^\alpha \xi_\alpha = 0,$$

这是 $C^N \times P^N$ 中的一个$2N-1$维超曲面,即(4.2.2)定义了一个映照 $\varphi: \tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2 \to Q$,定义为 $\varphi(\lambda, z) = (z, [\xi])$,$\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_N)$是 P^N 的齐次坐标.

设 w 是 $\mathfrak{D}$ 中的一个固定点,现在设 $\psi_{\alpha j} = \psi_{\alpha j}(w, z)$. 若能选取 $\psi_{\alpha j}$使得

$$\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha \neq 0, \tag{4.2.3}$$

其中

$$\xi_0 = - z^\alpha \xi_\alpha,\ \xi_\alpha = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \psi_{\alpha j}(w, z), \tag{4.2.4}$$

则由此定义了一个映照 $\varphi_w: \tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2 \to Q - P_w \cap Q$,
其中

$$P_w:\ \xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha = 0 \tag{4.2.5}$$

是 $C^N \times P^N$ 中$2N-1$维复超平面.

由于

$$c = \varphi_w(\tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2) \tag{4.2.6}$$

是在 $Q - P_w \cap Q$ 中,Leray 的 Cauchy-Fantappiè 公式为

$$\varphi(w) = \frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N} \int_C \frac{\varphi(z) \omega_1(\xi) \wedge \omega(z)}{[\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha]^N} \tag{4.2.7}$$

$$= \frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N} \int_{\tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2} \varphi_w^* \frac{\varphi(z) \omega_1(\xi) \wedge \omega(z)}{[\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha]^N}, \tag{4.2.8}$$

其中 $\varphi(w)$是在 $\mathfrak{D}$ 全纯且在 $\overline{\mathfrak{D}}$ 连续的函数,

$$\omega_1(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N} (-1)^{\alpha-1} \xi_\alpha \mathrm{d}\xi_1 \wedge \cdots$$

$$\wedge\, \mathrm{d}\xi_{\alpha-1} \wedge \mathrm{d}\xi_{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\xi_N,$$

$$\omega(z) = \mathrm{d}z^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^N. \tag{4.2.9}$$

我们不妨假定

$$\xi_0 + w^\alpha \xi_\alpha = 1. \tag{4.2.10}$$

由(4.2.4)知

$$d\xi_\alpha = \sum_{j=1}^{r} \psi_{\alpha j} d\lambda_j + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial \psi_{\alpha j}}{\partial \bar{z}^\beta} \overline{dz^\beta} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial \psi_{\alpha j}}{\partial z^\beta} dz^\beta,$$

故当 $\tilde{c}_2$ 是在 $\partial\mathfrak{D}$ 上时,

$$\begin{aligned} &\varphi_w^*[\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)] \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\beta=1}^{N} (-1)^{\beta-1} \xi_\beta \delta_{\beta_1 \cdots\cdots \beta_{N-1}}^{1 \cdots \beta-1, \beta+1, \cdots N} \\ &\quad \times \left[\sum_{j=1}^{r} \psi_{\beta_1 j} d\lambda_j + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial \psi_{\beta_1 j}}{\partial \bar{z}^{\alpha_1}} \overline{dz^{\alpha_1}} \right] \\ &\quad \wedge \cdots \wedge \left[\sum_{j=1}^{r} \psi_{\beta_{N-1} j} d\lambda_j + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial \psi_{\beta_{N-1} j}}{\partial \bar{z}^{\alpha_{N-1}}} \overline{dz^{\alpha_{N-1}}} \right] \wedge \omega(z) \\ &= \Omega_0(\lambda, z) + \Omega_1(\lambda, z) + \cdots + \Omega_{r-1}(\lambda, z), \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

其中 $\Omega_s(\lambda,z)$ 是 $d\lambda_1, \cdots, d\lambda_r$ 的 s 次式($s=0,1,\cdots,r-1$). 由于 $\tilde{c}_1$ 是 $r-1$ 维循环, $\tilde{c}_2$ 是 $2N-r$ 维循环,

$$\varphi_w^*[\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)]|_{\tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2} = \Omega_{r-1}(\lambda, z), \tag{4.2.12}$$

因为 dz^α、$\overline{dz^\beta}$ 的次数大于 $2N-r$ 时必须为零,易见

$$\begin{aligned} \Omega_s(\lambda, z) &= \frac{1}{(N-1)!s!(N-s-1)!} \sum_{\beta=1}^{N} (-1)^{\beta-1} \delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_{N-1}}^{1 \cdots \beta-1, \beta+1, \cdots N} \xi_\beta \\ &\quad \times \sum_{j_1, \cdots, j_{N-1}=1}^{r} \psi_{\gamma_1 j_1} \cdots \psi_{\gamma_s j_s} \left(\lambda_{j_{s+1}} \frac{\partial \psi_{\gamma_{s+1} j_{s+1}}}{\partial \bar{z}^{\nu_1}} \right) \cdots \\ &\quad \times \left(\lambda_{j_{N-1}} \frac{\partial \psi_{\gamma_{N-1} j_{N-1}}}{\partial \bar{z}^{\nu_{N-s-1}}} \right) \\ &\quad \times d\lambda_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{j_s} \wedge \overline{dz^{\nu_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\nu_{N-s-1}}} \wedge \omega(z) \\ &= \frac{1}{s!(N-s-1)!} \sum_{\beta=1}^{N} (-1)^{\beta-1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \psi_{\beta j} \\ &\quad \times \sum_{j_1, \cdots, j_s=1}^{N} \det M_{\beta j_1 \cdots j_s \nu_1 \cdots \nu_{N-s-1}} \cdot d\lambda_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{j_s} \\ &\quad \wedge \overline{dz^{\nu_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\nu_{N-s-1}}} \wedge \omega(z), \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

其中

$$\det M_{\beta j_1\cdots j_s\nu_1\cdots\nu_{N-s-1}} = \delta^{1\cdots\beta-1,\beta+1,\cdots N}_{\gamma_1\cdots\gamma_{N-1}}\psi_{\gamma_1 j_1}\cdots\psi_{\gamma_s j_s}$$

$$\times\left(\sum_{j_{s+1}=1}^{r}\lambda_{j_{s+1}}\frac{\partial\psi_{\gamma_{s+1}j_{s+1}}}{\partial\bar{z}^{\nu_1}}\right)\cdots\left(\sum_{j_{N-1}=1}^{r}\lambda_{j_{N-1}}\frac{\partial\psi_{\gamma_{N-1}j_{N-1}}}{\partial\bar{z}^{\nu_{N-1}}}\right).\quad(4.2.14)$$

这是一个 $N-1$阶行列式，是在下面的 $N\times(r+N)$矩阵

$$M=\left((\psi_{\alpha j})_{1\leqslant\alpha\leqslant N,1\leqslant j\leqslant r},\left(\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\partial\psi_{\alpha j}}{\partial\bar{z}^{\beta}}\right)_{1\leqslant\alpha\leqslant N,1\leqslant\beta\leqslant N}\right)\quad(4.2.15)$$

中，在前 $N\times r$ 子矩阵

$$\Psi=(\psi_{\alpha k})\quad(4.2.16)$$

取出第 $j_1\cdots j_s$ 列，在后 $N\times N$ 子方阵

$$B=\left(\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\partial\psi_{\alpha j}}{\partial\bar{z}^{\beta}}\right)\quad(4.2.17)$$

取出第 $\nu_1,\cdots,\nu_{N-s-1}$列构成一个 $N\times(N-1)$矩阵，然后去掉第 β 行，得$(N-1)\times(N-1)$方阵 $M_{\beta j_1\cdots j_s\nu_1\cdots\nu_{N-s-1}}$的行列式.

特别是当 $s=r-1$时，

$$\det M_{\beta j_1\cdots j_{r-1}\nu_1\cdots\nu_{N-r}}=\delta^{1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,r}_{j_1\cdots j_{r-1}}\cdot\det N_{\beta j\nu_1\cdots\nu_{N-r}},\quad(4.2.18)$$

其中 $N_{\beta j\nu_1\cdots\nu_{N-r}}$是在矩阵

$$M=(\Psi,B)$$

中去掉第 β 行后，由 Ψ 的第$1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,r$ 列，B 的第 ν_1，$\cdots,\nu_{N-r}$列所构成的$(N-1)\times(N-1)$方阵. 此时

$$\Omega_{r-1}(\lambda,z)=\frac{1}{(N-r)!}\sum_{\beta=1}^{N}(-1)^{\beta-1}\left(\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\psi_{\beta k}\right)$$

$$\times\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\det N_{\beta j\nu_1\cdots\nu_{N-r}}\mathrm{d}\lambda_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{j-1}\wedge\mathrm{d}\lambda_{j+1}$$

$$\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_r\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\nu_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\nu_{N-r}}}\wedge\omega(z)\quad(4.2.19)$$

现在令 $N=m\times n,m\leqslant n$. C^N 中的点可以用一个 $m\times n$ 矩阵 Z

$=(z_{j\alpha})_{1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant\alpha\leqslant n}$表示之. 取域 $\mathfrak{D}=\mathfrak{R}_I(m,n)$，即适合

$$I - ZZ^{\dagger} > 0$$

的点集. 令 $\mathfrak{B}_I$ 为 $\mathfrak{R}_I$ 的边界，$\mathfrak{C}_I$ 为 $\mathfrak{R}_I$ 的特征流形，即 $ZZ^{\dagger}=I$ 的点集$\{Z\}$.

注意，以上的希腊字母指标 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$是由1到 N 的，以下改为由1到 n；拉丁字母指标 $j,k,l,\cdots$是由1到 r，以下改为由1到 m. 为方便起见，用和号的省略.

令 $m\times m$ Hermite 方阵

$$\Lambda=(\lambda_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant m},\Lambda^{\dagger}=\Lambda, \tag{4.2.20}$$

Λ 的元素共有

$$r=m^2 \tag{4.2.21}$$

个独立的实参数，故 Λ 可代表 R^r 中的一个点.

令 $\bar{e}_1$是 R^r 的 r 维链

$$\Lambda>0,\ \mathrm{tr}\ (\Lambda)\leqslant 1, \tag{4.2.22}$$

而 $\bar{c}_1=\partial\bar{e}_1$是 R^r 的 $r-1$维循环

$$\Lambda>0,\ \mathrm{tr}\ (\Lambda)=1. \tag{4.2.23}$$

令 $W=(w_{j\beta})$是 $\mathfrak{R}_I$ 的一个固定点，$\xi_0,\xi_{\alpha j}$ $(\alpha=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$表示复投影空间 P^N 的齐次坐标. 把 $\xi_{\alpha j}$排列成一个 $n\times m$ 矩阵

$$\Theta=(\xi_{\alpha j})_{1\leqslant\alpha\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m}. \tag{4.2.24}$$

现取[①]

$$\begin{aligned}\Theta&=-Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\Lambda,\\ \xi_0&=\mathrm{tr}[ZZ^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\Lambda].\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

---

① 在文献[39]中，采取

$$\Theta=Z^{\dagger}[(Z-W)Z^{\dagger}]^{-1}\Lambda,$$

因为那里是讨论 $Z\in\mathfrak{C}$ 的情形，此时 $ZZ^{\dagger}=I$，因此$(Z-W)Z^{\dagger}=I-WZ^{\dagger}$. 在 W 固定，$(Z-W)Z^{\dagger}$ 对 Z 在 $\mathfrak{C}$ 的一个邻域中非异，是不成问题的. 但此处所采取的使得计算较容易些.

引理4.2.1　设 $W\in\mathfrak{R}_I, Z\in\overline{\mathfrak{R}}_I$，则 $I-WZ^\dagger$ 非异，并且 $WZ^\dagger$ 的任一特征根 c 的绝对值小于1.

证　设 $u=(u_1,\cdots,u_m)$ 是单位向量，使得

$$uWZ^\dagger=cu,$$

则有

$$uWZ^\dagger(WZ^\dagger)^\dagger u^\dagger=|c|^2.$$

由于 $$I-WZ^\dagger ZW^\dagger=I-WW^\dagger+W(I-Z^\dagger Z)W^\dagger,$$

$$(4.2.26)$$

当 $W\in\mathfrak{R}_I$，即 $I-WW^\dagger>0$；当 $Z\in\overline{\mathfrak{R}}_I$，即 $I-ZZ^\dagger\geqslant 0$，用矩阵极坐标便可以证明这与 $I-Z^\dagger Z\geqslant 0$ 是等价的，因此由(4.2.26)知

$$I-WZ^\dagger(WZ)^\dagger>0,$$

此即 $WZ^\dagger\in\mathfrak{R}_I$，并且

$$0<u[I-WZ^\dagger(WZ^\dagger)^\dagger]u^\dagger=1-|c|^2.$$

引理证毕.　▌

由(4.2.25)知

$$\begin{aligned}\xi_0+z_{j\alpha}\xi_{\alpha j}&=\operatorname{tr}[ZZ^\dagger(I-WZ^\dagger)^{-1}\Lambda]+\operatorname{tr}[Z\Theta]\\&=0,\end{aligned}\tag{4.2.27}$$

及

$$\begin{aligned}\xi_0+w_{j\alpha}\xi_{\alpha j}&=\operatorname{tr}[(ZZ^\dagger-WZ^\dagger)(I-WZ^\dagger)^{-1}\Lambda]\\&=\operatorname{tr}\{[(I-WZ^\dagger)-(I-ZZ^\dagger)](I-WZ^\dagger)^{-1}\Lambda\}\\&=\operatorname{tr}(\Lambda)-\operatorname{tr}[(I-ZZ^\dagger)(I-WZ^\dagger)^{-1}\Lambda].\end{aligned}\tag{4.2.28}$$

由此可见，当 $z\in\mathfrak{C}_I$ 时，

$$\xi_0+w_{j\alpha}\xi_{\alpha j}=\operatorname{tr}(\Lambda)>0.\tag{4.2.29}$$

故有 $\mathfrak{C}_I$ 的邻域使 z 在此邻域中时，有

$$\xi_0+w_{j\alpha}\xi_{\alpha j}\neq 0.\tag{4.2.30}$$

定理4.2.2　当 $W\in\mathfrak{R}_I$，$\Lambda>0$ 时，有 $\mathfrak{C}_I$ 的邻域 $\mathfrak{B}_w$，令

$$\Theta=(\xi_{\alpha j})=-Z^\dagger(I-WZ^\dagger)^{-1}\Lambda,$$

则当 $Z\in\mathfrak{B}_w$ 时，

$$\xi_0 = \mathrm{tr}[ZZ^\dagger (I - WZ^\dagger)^{-1}\Lambda]$$

适合

$$\xi_0 + z_{j\alpha}\xi_{\alpha j} = 0,$$

$$\xi_0 + w_{j\alpha}\xi_{\alpha j} \neq 0.$$

因此由 $\xi = (\xi_0, \xi_{\alpha j})$ 定义的映照 $\varphi_w(\Lambda, Z) = (Z, [\xi])$ 是对 $W \in \mathfrak{R}_I$ 全纯的 Leray 映照

$$\varphi_w : \{Z \in \mathfrak{V}_w, \Lambda > 0\} \longrightarrow Q - P_w \cap Q.$$

特别是，我们取 $\Lambda \in \tilde{c}_1, Z \in \tilde{c}_2 = \mathfrak{C}_I$ 时，这里

$$\tilde{c}_1 : \{\Lambda > 0, \mathrm{tr}(\Lambda) = 1\}, \tag{4.2.31}$$

此时(4.2.10)条件成立，根据(4.2.10)

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2} f(Z)\varphi_w^* \frac{\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)}{[\xi_0 + w_{\alpha j}\xi_{\alpha j}]^N} \\ &= \int_{\tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2} f(Z)\varphi_w^* \omega_1(\xi) \wedge \omega(Z) \\ &= \int_{\tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2} f(Z)\Omega_{r-1}(\Lambda, Z).\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

要计算末尾的积分，先要把 $Z = (z_{j\alpha})$ 的元素排成单一的次序：

(j, α) 对应为 $\nu = (j-1)n + \alpha$,

$$j = 1, \cdots, m, \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

于是

$$\begin{aligned}z &= (z_{11}, \cdots, z_{1n}, z_{21}, \cdots, z_{2n}, \cdots, z_{m1}, \cdots, z_{mn}) \\ &= (z^1, \cdots, z^N).\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

同样

$$\begin{aligned}\xi &= (\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1m}, \cdots, \xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{nm}) \\ &= (\xi_1, \cdots, \xi_N),\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

及

$$\lambda = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \cdots, \lambda_{1m}, \cdots, \lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \cdots, \lambda_{mm}). \tag{4.2.35}$$

于是(4.2.25)可写为

$$\xi' = \Psi\lambda', \quad \Psi = -Z^\dagger (I - WZ^\dagger)^{-1} \cdot\times I^{(m)}, \tag{4.2.36}$$

其中 Ψ 是 $mn \times m^2$ 矩阵，其第 (α, j) 行第 (p, q) 列的元素为

$$\psi_{\alpha p}\delta_{jq}, \quad (\psi_{\alpha p}) = -Z^\dagger (I - WZ^\dagger)^{-1}. \tag{4.2.37}$$

由(4.2.25)知

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Theta &= -Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}\Lambda - \mathrm{d}Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\Lambda \\
&\quad - Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}W\mathrm{d}Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\Lambda \\
&= -Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}\Lambda \\
&\quad -(I-Z^{\dagger}W)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\Lambda. \qquad (4.2.38)
\end{aligned}$$

把上式排成向量，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\xi' &= -[Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\cdot\times I^{(m)}]\mathrm{d}\lambda' \\
&\quad -[(I-Z^{\dagger}W)^{-1}\cdot\times \Lambda'(I-\bar{Z}W')^{-1}]\mathrm{d}z^{\dagger} \\
&= \Psi\mathrm{d}\lambda' + B\mathrm{d}z^{\dagger}, \qquad (4.2.39)
\end{aligned}$$

其中

$$\Psi = -Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\cdot\times I^{(m)} \qquad (4.2.40)$$

是 $nm\times m^2$ 矩阵；

$$B = -(I-Z^{\dagger}W)^{-1}\cdot\times \Lambda'(I-\bar{Z}W')^{-1}$$

是 $mn\times mn$ 方阵.

$$\begin{aligned}
M &= (\Psi, B) \\
&= -(Z^{\dagger}(I-WZ^{\dagger})^{-1}\cdot\times I^{(m)}, \\
&\qquad (I-Z^{\dagger}W)^{-1}\cdot\times \Lambda'(I-ZW')^{-1}). \qquad (4.2.41)
\end{aligned}$$

作变换

$$Z\to UZV,\ W\to UWV,\ \Lambda\to U\Lambda U^{\dagger}, \qquad (4.2.42)$$

其中 U 与 V 分别是 m 阶与 n 阶酉方阵，则据 Θ 的定义，

$$\Theta\to V^{\dagger}\Theta U^{\dagger},$$

并且外微分式 $\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)$

不变，我们可以把 $Z\in\mathfrak{C}$ 变为 $(I^{(m)},0)$点.

当假定 $Z=(I^{(m)},0)$时，(4.2.41)为

$$M = -\begin{pmatrix}
(I-W_1)^{-1} & (I-W_1)^{-1} & (I-W_1)^{-1}W_2 \\
\cdot\times I^{(m)} & \cdot\times \Lambda'(I-W_1)^{-1} & \cdot\times \Lambda'(I-W_1)^{-1} \\
0 & 0 & I^{(n-m)} \\
 & & \cdot\times \Lambda'(I-W_1)^{-1}
\end{pmatrix},$$

(4.2.43)

其中 $W=(W_1^{(m)},\ W_2)$.

根据 $(N-1)\times(N-1)$ 方阵 $N_{\beta j\nu_1\cdots\nu_{N-r}}$ 的定义(4.2.18)知，$\det N_{\beta j\nu_1\cdots\nu_{N-r}}$ 不为零，只可能取 $\beta\leqslant r,\nu_1,\cdots,\nu_{N-r}$，取 $r+1,\cdots,mn$，此时

$$\det N_{\beta j\nu_1\cdots\nu_{N-r}}=\delta_{\nu_1\cdots\nu_{N-r}}^{r+1,\cdots,mn}\Psi_{\beta j}[\det A'(I-W_1)^{-1}]^{n-m},\tag{4.2.44}$$

其中 $\Psi_{\beta j}$ 为

$$\Psi_1=-(I-W_1)^{-1}\cdot\times I^{(m)}$$

去掉第 $\beta(\leqslant r)$ 行第 j 列后的行列式，亦即 $\Psi_1=(\psi_{\alpha j})$ 中对应于元素 $\psi_{\beta j}$ 的余因式，故有

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{r}(-1)^{\beta-1}\psi_{\beta k}\Psi_{\beta j}&=\sum_{\beta=1}^{r}(-1)^{\beta-1}\psi_{\beta k}\Psi_{\beta j}\\&=\delta_{kj}\det\ (I-W_1)^{-m}.\end{aligned}\tag{4.2.45}$$

以(4.2.44)代入(4.2.19)并应用(4.2.45)，在 $\tilde{c}_1\times\tilde{c}_2$ 上，当 $Z=(I,0)$ 时，有

$$\begin{aligned}\Omega_{r-1}(\Lambda,Z)=&(\det\Lambda)^{n-m}\sum_{j=1}(-1)^{j-1}\lambda_j\mathrm{d}\lambda_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{j-1}\\&\wedge\mathrm{d}\lambda_{j+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_r\frac{\mathrm{d}z^{r+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^N\wedge\omega(Z)}{\det\ (I-WZ^{\dagger})^n}.\end{aligned}\tag{4.2.46}$$

引理4.2.3 我们选取 $\tilde{c}_1$ 及 $\mathfrak{C}_1$ 的定向，使对任一点 $Z\in\mathfrak{C}_1$，$\Lambda\in\tilde{c}_1$，当 $W\in\mathfrak{R}_1$ 时，有

$$\Omega_{r-1}(\Lambda,Z)=(-2i)^{\frac{m(m-1)}{2}}(\det\Lambda)^{n-m}\dot{\Lambda}\frac{\dot{Z}}{\det(I-WZ^{\dagger})^n},$$

其中

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}=&\mathrm{d}\lambda_{22}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{mm}\wedge\mathrm{d}\lambda_{12}^{(1)}\wedge\mathrm{d}\lambda_{12}^{(2)}\\&\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{m-1,m}^{(1)}\wedge\mathrm{d}\lambda_{m-1,m}^{(2)},\end{aligned}$$

$\tilde{c}_1=\{\Lambda\in\mathrm{C}^r\,|\,\Lambda>0,\mathrm{tr}(\Lambda)=1\}$. $\Lambda=(\lambda_{jk})$,

$\lambda_{jk}=\lambda_{jk}^{(1)}+i\lambda_{jk}^{(2)}$；$\lambda_{jk}^{(1)}$ 与 $\lambda_{jk}^{(2)}$ 为实的$(j<k)$；

$$\dot{Z}=\frac{(-i)^m}{(-2i)^{mn-m(m+n)/2}}\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ m+1\leqslant\beta\leqslant n}}\wedge z_j\,\overline{\mathrm{d}z_\beta}\wedge\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant\beta\leqslant n}}\mathrm{d}z_j z_\beta^{\dagger}.$$

这里$\dot{Z}$是$\mathfrak{C}_I$的体积元素，$Z=(Z_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha\leqslant n,1\leqslant\beta\leqslant n}$是酉方阵，$Z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$，

$z_\alpha=(z_{\alpha1},\cdots,z_{\alpha n})\quad(\alpha=1,\cdots,n)$. 此外，

$$\int_{\Lambda>0,\mathrm{tr}(\Lambda)=1}(\det\Lambda)^{n-m}\dot{\Lambda}$$
$$=\frac{(n-m)!(n-m+1)!\cdots(n-1)!}{(mn-1)!}\pi^{m(m-1)/2}.$$

证　由于$\Lambda\in\tilde{c}_1$时，有

$$\mathrm{d}\lambda_{j,j+l}\wedge\mathrm{d}\lambda_{j+l,j}=\mathrm{d}\lambda_{j,j+l}\wedge\overline{\mathrm{d}\lambda}_{j,j+l}$$
$$=-2i\mathrm{d}\lambda_{j,j+l}^{(1)}\wedge\mathrm{d}\lambda_{j,j+l}^{(2)},$$

其中$\lambda_{jk}=\lambda_{jk}^{(1)}+i\lambda_{jk}^{(2)}$，$\lambda_{jk}^{(1)}$与$\lambda_{jk}^{(2)}$为实的($j<k$). 又由于

$$\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(\Lambda)=\mathrm{d}\lambda_{11}+\cdots+\mathrm{d}\lambda_{mm}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\lambda_{kk}\mathrm{d}\lambda_{11}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{k-1,k-1}\wedge\mathrm{d}\lambda_{k+1,k+1}$$
$$\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{mm}$$
$$=(1-\lambda_{22}-\cdots-\lambda_{mm})\mathrm{d}\lambda_{22}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{mm}$$
$$+\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k-1}\lambda_{kk}(-\mathrm{d}\lambda_{22}-\cdots-\mathrm{d}\lambda_{mm})\wedge\mathrm{d}\lambda_{22}$$
$$\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{k-1,k-1}\wedge\mathrm{d}\lambda_{k+1,k+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{mm},$$

故

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\lambda_j\mathrm{d}\lambda_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{j-1}\wedge\mathrm{d}\lambda_{j+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_r$$
$$=\varepsilon(-2i)^{\frac{m(m-1)}{2}}\mathrm{d}\lambda_{22}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{mm}\wedge\mathrm{d}\lambda_{12}^{(1)}\wedge\mathrm{d}\lambda_{12}^{(2)}$$
$$\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{m-1,m}^{(1)}\wedge\mathrm{d}\lambda_{m-1,m}^{(2)}.$$

我们选取$\tilde{c}_1$的定向，使$\varepsilon=1$，而$\tilde{c}_1$的体积元素为

$$\dot{\Lambda}=\mathrm{d}\lambda_{22}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{mm}\wedge\mathrm{d}\lambda_{12}^{(1)}\wedge\mathrm{d}\lambda_{12}^{(2)}$$
$$\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{m-1,m}^{(1)}\wedge\mathrm{d}\lambda_{m-1,m}^{(2)}$$

便可以了.

根据《典》著中(5.2.17)式,$\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$的体积元素为

$$\dot{Z}=\frac{(-i)^m}{(-2i)^{mn-m(m+1)/2}}\varepsilon_{\mathrm{I}}\prod_{j,k=1}^{m}\mathrm{d}z_j\cdot z_k^{\dagger}$$

$$\wedge\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ m+1\leqslant\alpha\leqslant n}}\mathrm{d}z_j\cdot z_\alpha^{\dagger}\ \wedge\ \overline{\mathrm{d}z_j}\cdot z_\alpha'$$

$$=\frac{(-i)^m}{(-2i)^{mn-m(m+1)/2}}\varepsilon_{\mathrm{I}}\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ m+1\leqslant\alpha\leqslant n}}z_\alpha\mathrm{d}z_j^{\dagger}$$

$$\wedge\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant\alpha\leqslant n}}\mathrm{d}z_j\cdot z_\alpha^{\dagger},$$

其中ε_{I}为+1或-1.我们取$\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$的定向使$\varepsilon_{\mathrm{I}}=1$.

$\dot{Z}$是经变换$Z\longrightarrow UZV$不变,其中U与V分别为m阶与n阶酉方阵,特别是当$Z=(I^{(m)},0)$时,

$$\dot{Z}=\frac{(-i)^m}{(-2i)^{mn-m(m+1)/2}}\overline{\mathrm{d}z}^{r+1}\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z}^{N}\wedge\omega(z).$$

这就证明了引理的第一部分,至于引理的第二部分,即积分的计算,是不难的,用文献[24]中的技巧即可算出,这里从略,有兴趣的读者可参阅文献[39]中的引理3.

我们已经知道$\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$的体积为(见《典》著中的定理6.2.3(iii)):

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})=\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\dot{Z}=\frac{2^m\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!(n-m+1)!\cdots(n-1)!}.\tag{4.2.47}$$

我们得出以下定理:

定理4.2.4 设$f(z)$在$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$全纯,在$\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$连续,则有

$$f(w)=\frac{(mn-1)!}{(2\pi i)^{mn}}\int_c f(z)\frac{\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w_{j\alpha}\xi_{\alpha j}]^{mn}}$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(m,n)}\frac{f(Z)\dot{Z}}{\det(I-WZ^{\dagger})^n},$$

其中

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(m,n))=\frac{2^m\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!(n-m+1)!\cdots(n-1)!}$$

是 $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 的(欧氏)体积.

对于典型域

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(n)=\{Z\in C^{n\times n}\mid I-ZZ^{\dagger}>0,Z=Z'\}$$

及 $$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n)=\{Z\in C^{n\times n}\mid I-ZZ^{\dagger}>0,Z=-Z'\}$$

皆可用同法由 Cauchy-Fantappiè 公式推出华罗庚的 Cauchy 公式.

至于典型域

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)=\{z=(z^1,\cdots,z^N)\in C^N\mid 1+|zz'|^2-2z\bar{z}'>0,1-|zz'|>0\}$$

在特征流形 $\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 上的全纯 Leray 映照可以如下构造:

以 $\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}}$ 表示 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的边界. $\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 是特征流形,如 $z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$,令 Γ 为实的正交 $N\times N$ 方阵,使

$$z=(z_1,z_2,0,\cdots,0)\Gamma,$$

于是

$$1+|zz'|^2-2zz^{\dagger}=(1-|z_1+iz_2|^2)(1-|z_1-iz_2|^2),$$

$$1-|zz'|^2=1-|z_1+iz_2|^2|z_1-iz_2|^2, \tag{4.2.48}$$

因此 $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{IV}}$ 的点可以分为三种情形:

(i) $z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$,仅当

$$|z_1+iz_2|<1,\ |z_1-iz_2|<1;$$

(ii) $z\in\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$,仅当

$$|z_1+iz_2|=1,\ |z_1-iz_2|=1;$$

(iii) $z\in\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}}-\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$,仅当

$$|z_1+iz_2| \text{ 与 } |z_1-iz_2|,$$

有一个等于1,另一个<1.

我们只考虑 $N\geqslant 2$($N=1$,$\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 是单位圆盘).

引理4.2.5 $z\in\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 仅当

$$z=e^{i\varphi}x,\ x \text{ 为实的},xx'=1,\ 1\leqslant\varphi<\pi.$$

证明可参阅《典》著中222～225页.

引理4.2.6 如 $w\in\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$, $u\in\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{IV}}$,则

$$1 + ww'\overline{uu'} - 2wu^{\dagger} \neq 0.$$

证 存在实正交方阵 Γ,使

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, 0, \cdots, 0)\Gamma,$$

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, 0, \cdots, 0)\Gamma.$$

根据《典》著中引理2.1.2及公式(2.1.78)有

$$\begin{aligned} & 1 + ww'\overline{uu'} - 2wu^{\dagger} \\ & = 1 + (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2)(\overline{u}_1^2 + \overline{u}_2^2 + \overline{u}_3^2 + \overline{u}_4^2) \\ & \quad - 2(w_1\overline{u}_1 + \cdots + w_4\overline{u}_4) \\ & = \det(I - WU^{\dagger}), \end{aligned} \tag{4.2.49}$$

其中

$$W = \begin{pmatrix} w_1 + iw_2 & iw_3 - w_4 \\ iw_3 + w_4 & w_1 - iw_2 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 & iu_3 - u_4 \\ iu_3 + u_4 & u_1 - iu_2 \end{pmatrix}$$

分别适合

$$I - WW^{\dagger} > 0, \quad I - UU^{\dagger} \geqslant 0.$$

根据引理4.2.1知 $I - WU^{\dagger}$ 是非异的,故(4.2.49)式不为零.本引理得证. ▌

在引理中,特别取

$$u = z = e^{i\varphi}x, \quad 0 \leqslant \varphi < \pi, \quad x \text{ 为实}, \quad xx' = 1, \tag{4.2.50}$$

则

$$\begin{aligned} & 1 + ww'e^{-2i\varphi} - 2wxe^{-i\varphi} \\ & = e^{-2i\varphi}(ww' - 2e^{i\varphi}wx' + e^{2i\varphi}) \\ & = \overline{zz'}(w - z)(w - z)', \end{aligned} \tag{4.2.51}$$

当 $w \in \mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$,这是不为零的.

引理4.2.7 若 $w = (w_1, \cdots, w_N)$ 适合 $ww' \neq 0$,则存在非异 $N \times N$ 方阵 $A(w)$,它的元素是 w 的全纯函数,使得

$$wA = (\sqrt{ww'}, 0, \cdots, 0),$$

并且

$$AA' = A'A = I.$$

证　$N=1$，引理显然成立. 假定 $N-1(>0)$ 时引理成立. 现证 N 个复变数 w 的情形.

首先注意

$$w_1^2 + \cdots w_{\alpha-1}^2 + w_{\alpha+1}^2 + \cdots + w_N^2 \quad (\alpha = 1, \cdots, N)$$

中最少有一个不为零，否则

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{N} (w_1^2 + \cdots + w_{\alpha-1}^2 + w_{\alpha+1}^2 + \cdots + w_N^2)$$

$$= (N-1)(w_1^2 + \cdots + w_N^2),$$

这与假设矛盾. 不妨假定

$$w_2^2 + \cdots + w_N^2 \neq 0,$$

否则，把变数 $w_1, \cdots, w_N$ 的次序重新排列，使得上面不等式成立. 根据归纳法假设，存在 $N-1$ 阶非异方阵 $A_1(w_2, \cdots, w_N)$，其元素是 $w_2, \cdots, w_N$ 的全纯函数，使得 $A_1A_1' = A_1'A_1 = I$.

$$(w_1, w_2, \cdots, w_N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(w_1, \sqrt{w_2^2 + \cdots + w_N^2}, 0, \cdots, 0\right).$$

取 $A_2(w)$

$$= \frac{1}{\sqrt{ww'}} \begin{pmatrix} w_1 & -\sqrt{w_2^2 + \cdots + w_N^2} & 0 \\ \sqrt{w_2^2 + \cdots + w_N^2} & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(N-2)} \end{pmatrix},$$

$$A_2A_2' = A_2'A_2 = I.$$

便有

$$(w_1, w_2, \cdots, w_N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} A_2 = (\sqrt{ww'}, 0, \cdots, 0),$$

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} A_2$，则得引理.　　▌

现取 A 使

$$(w-z)A=\left(\sqrt{(w-z)(w-z)'},0,\cdots,0\right),\quad (4.2.52)$$

其中 A 是 $w\in\mathfrak{R}_N$ 的全纯数，$z\in\mathfrak{C}_N$. 令

$$\xi=\frac{vA'}{[(w-z)(w-z)']^{1/2}},$$

$$\xi_0=\frac{-zAv'}{[(w-z)(w-z)']^{1/2}},\quad (4.2.53)$$

其中 $z=e^{i\varphi}x$，$xx'=1$，

$$v=(1,iy_1,\cdots,iy_{N-1}),$$

$$y_1,\cdots,y_{N-1}\text{ 为实的，}y_1^2+\cdots+y_{N-1}^2<1.\quad (4.2.54)$$

由此定义的点集令之为 $\tilde{c}_1$. 由(4.2.53)可知

$$\begin{aligned}\xi_0+z^\alpha\xi_\alpha&=\xi_0+z\xi'\\&=\xi_0+zAv'/[(w-z)(w-z)']^{1/2}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha&=\frac{(w-z)Av'}{[(w-z)(w-z)']^{1/2}}\\&=\frac{\left(\sqrt{(w-z)(w-z)'},0,\cdots,0\right)v'}{[(w-z)(w-z)']^{1/2}}\\&=1.\end{aligned}\quad (4.2.55)$$

即由(4.2.53)所诱导的映照 $\varphi_w:\tilde{c}_1\times\mathfrak{C}_N\longrightarrow Q-Q\cap P_w$ 是全纯 Leray映照.

由于

$$\begin{aligned}\omega(z)&=dz^1\wedge\cdots\wedge dz^N\\&=ie^{iN\varphi}\sum_{\alpha=1}^{N}(-1)^{\alpha-1}x^\alpha d\varphi\wedge dx^1\wedge\cdots\\&\quad\wedge dx^{\alpha-1}\wedge dx^{\alpha+1}\wedge\cdots\wedge dx^N\\&=i(zz')^{N/2}\sum_{\alpha=1}^{N}(-1)^{\alpha-1}x^\alpha d\varphi\wedge dx^1\wedge\cdots\\&\quad\wedge dx^{\alpha-1}\wedge dx^{\alpha+1}\wedge\cdots\wedge dx^N,\end{aligned}\quad (4.2.56)$$

及 $$d\xi=\frac{dvA'}{[(w-z)(w-z)']^{1/2}}+dz\text{ 的项},$$

令 $A=(a_{\alpha\beta})$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^N}\\
&=\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)\\
&=\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\delta^{1\cdots N}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{N-1}}\xi_\alpha \mathrm{d}\xi_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\xi_{\alpha_{N-1}}\wedge\omega(z)\\
&=\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\delta^{1\cdots N}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{N-1}}(a_{\alpha\beta}v_\beta)a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_{N-1}\beta_{N-1}}\\
&\quad\times\frac{\mathrm{d}v_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}v_{\beta_{N-1}}\wedge\omega(z)}{[(w-z)(w-z)']^{N/2}}\\
&=\frac{\det A\cdot(-1)^N}{(N-1)![(w-z)(w-z)']^{N/2}}\delta^{1\cdots N}_{\beta\beta_1\cdots\beta_{N-1}}v_\beta \mathrm{d}v_{\beta_1}\\
&\quad\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}v_{\beta_{N-1}}\wedge\omega(z)\\
&=\frac{\det A\cdot(-1)^N}{[(w-z)(w-z)']^{N/2}}i^{N-1}\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}y_{N-1}\wedge\omega(z),
\end{aligned}\tag{4.2.57}$$

因为 $v_1=1$，$v_j=iy_{j-1}$，$j=2,\cdots,N$，因此

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0+w^\alpha\xi_\alpha]^{N/2}}&=\frac{(-i)^N(zz')^{N/2}\det A}{[(w-z)(w-z)']^{N/2}}\\
&\quad\times \mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}y_{N-1}\wedge \mathrm{d}\varphi\wedge\sum_{\alpha=1}^{N}(-1)^{\alpha-1}x^\alpha \mathrm{d}x^1\\
&\quad\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{\alpha-1}\wedge \mathrm{d}x^{\alpha+1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^N.
\end{aligned}\tag{4.2.58}$$

我们取

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_2=\Big\{z\,\Big|\,z&=\left(\frac{1+t}{2},\frac{1-t}{2i},0\cdots,0\right)\Gamma=\frac{1+t}{2}x+i\frac{t-1}{2}y,\\
&|t|<1,\Gamma\text{ 为实正交方阵，}xx'=yy'=1,\ xy'=0\Big\}.
\end{aligned}\tag{4.2.59}$$

根据《典》著中(5.1.29)式知，

$$\tilde{c}_2=\mathfrak{B}_N-\mathfrak{C}_N,$$

并由《典》著中225页知

$$\mathscr{X}_2 = \mathfrak{C}_N. \tag{4.2.60}$$

令

$$\tilde{c} = \tilde{c}_1 \times \tilde{c}_2,$$

则

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \times \tilde{c}_2 + (-1)^{N-1}\tilde{c}_1 \times \mathfrak{C}_N. \tag{4.2.61}$$

这是$2N-1$维循环. 令 $\mathscr{X}$ 在 Leray 映照 φ_w 之下的像为

$$c = \varphi_w(\mathscr{X}), \tag{4.2.62}$$

则有

$$\int_c f(z)\frac{\omega_1(\xi)\wedge\omega(z)}{[\xi_0 + w^\alpha\xi_\alpha]^N}$$
$$= \int_{\tilde{c}_1\times\mathfrak{C}_N}\frac{-i^N\det A}{[(w-z)(w-z)'\,\overline{(zz')}]^{N/2}}f(z)\dot{y}\wedge\dot{z}, \tag{4.2.63}$$

其中 $\det A = \pm 1$. 由于 $\mathfrak{C}_N$ 的体积元素为

$$\dot{z} = \varepsilon d\varphi \wedge \sum_{\alpha=1}^{N}(-1)^{\alpha-1}x^\alpha dx^1 \wedge \cdots$$
$$\wedge\, dx^{\alpha-1} \wedge dx^{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge dx^N, \tag{4.2.64}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$. 我们选取定向使$-\varepsilon\det A = 1$. 根据(4.2.58)式,有

$$\omega_1(\xi) \wedge \omega(z)\,|_{\mathscr{X}_1\times c_2} = 0,$$

因为 $\omega_1(\xi)$是 dv_α 的 $N-1$次式,而 $\mathscr{X}_1$仅是 $N-2$维链.

由(4.2.63)、(4.2.58)及(4.2.57)有

$$\int_c f(z)\frac{w_1(\xi)\wedge w(z)}{[\xi_0 + w^\alpha\xi_\alpha]^N}$$
$$= i^N\int_{y_1^2+\cdots+y_{N-1}^2<1}\dot{y}\int_{\mathfrak{C}_N}\frac{f(z)\dot{z}}{[1 + ww'\,\overline{zz'} - 2wz^\dagger\,]^{N/2}}$$
$$= i^N\frac{2\pi^{(N-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}+1\right)}\int_{z\in\mathfrak{C}_N}\frac{f(z)\dot{z}}{[1 + ww'\,\overline{zz'} - 2wz^\dagger\,]^{N/2}}. \tag{4.2.65}$$

利用 Γ 函数的公式

$$\Gamma(2x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

定理4.2.8　设 $f(z)$在 $\mathfrak{R}_N$ 全纯，在 $\overline{\mathfrak{R}}_N$ 连续，则有

$$f(w) = \frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N} \int_c f(z) \frac{w_1(\xi) \wedge w(z)}{[\xi_0 + w^a \xi_a]^N}$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_N)} \int_{z \in \mathfrak{C}_N} \frac{f(z) \dot{z}}{(1 + ww' \overline{zz'} - 2wz^{\dagger})^{N/2}},$$

其中 c 是 $Q - P_w \cap Q$ 中$2n-1$维循环，

$$V(\mathfrak{C}_N) = \frac{2\pi^{N/2+1}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

是 $\mathfrak{C}_N$ 的体积(见《典》著中定理6.2.6).

这是从 Cauchy-Fantappiè 公式导出 $\mathfrak{R}_N(N)$的华罗庚Cauchy 公式(见文献[24]).

§ 4.3　Cauchy-Szegö 积分的估值

设 $\mathfrak{R}$ 是 C^N 中的有界域具有特征流形 $\mathfrak{C}$，并且有 $\mathfrak{C}$ 上的 Cauchy-Szegö 核 $S(w,\bar{z}) = \overline{S(z,\overline{w})}$，使得任一 $f \in A(\overline{\mathfrak{R}})$，这是在 $\mathfrak{R}$ 全纯在 $\overline{\mathfrak{R}}$ 连续的函数类，有

$$f(w) = \int_{\mathfrak{C}} f(u) S(w,\bar{u}) \dot{u}. \tag{4.3.1}$$

此公式相当于 $\mathfrak{L}^2(\mathfrak{R})$的 Bergman 积分，只是积分区域不是在 $\mathfrak{R}$，而是在特征流形 $\mathfrak{C}$. 定理3.5.2构造了 $A(\overline{\mathfrak{R}})$的一个在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系$\{\varphi_\nu(z)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$，使得

$$S(w,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(w) \overline{\varphi_\nu(z)} \tag{4.3.2}$$

在$(w,z) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ 的任一紧子集中绝对并一致收敛. 此外，如 t 是 $\mathfrak{R}$ 的一个固定点，则

$$\left[\frac{\partial^m \varphi_{p_1 \cdots p_N}(z)}{(\partial z^1)^{m_1} \cdots (\partial z^N)^{m_N}}\right]_{z=t}$$

$$=\begin{cases}0,\text{当}(m_1,\cdots,m_N)\subset(p_1,\cdots,p_N);\\ \text{正数},\text{当}(m_1,\cdots,m_N)=(p_1,\cdots,p_N)\end{cases}.\tag{4.3.3}$$

由此可知

$$S(t,\bar{t})=|\varphi_{0,\cdots,0}(t)|^2>0\tag{4.3.4}$$

对 $t\in\mathfrak{R}$.

我们引进 Cauchy-Szegö 度量：

$$d\sigma^2=h_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})dz^\alpha\overline{dz^\beta},\quad h_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})=\frac{\partial^2\log S(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}\tag{4.3.5}$$

定理4.3.1　Cauchy-Szegö 度量是正定的.

证　由于

$$\begin{aligned}&h_{\alpha\bar{\beta}}(t,\bar{t})\\&=\frac{1}{S(t,\bar{t})^2}\left[S(z,\bar{z})\frac{\partial^2S(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}-\frac{\partial S(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha}\cdot\frac{\partial S(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}^\beta}\right]_{z=t}\\&=\frac{1}{S(t,\bar{t})^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=m}\left\{S(t,\bar{t})\left[\frac{\partial\varphi_{m_1\cdots m_N}(z)}{\partial z^\alpha}\cdot\frac{\partial\bar{\varphi}_{m_1\cdots m_N}(z)}{\partial\bar{z}^\beta}\right]_{z=t}\right.\\&\quad\left.-\left[\frac{\partial\varphi_{m_1\cdots m_N}(z)}{\partial z^\alpha}\right]_{z=t}\overline{\varphi_{m_1\cdots m_N}(t)}\left[\frac{\partial S(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}^\beta}\right]_{z=t}\right\},\end{aligned}$$

根据(4.3.3)，有

$$\begin{aligned}&h_{\alpha\bar{\beta}}(t,\bar{t})\\&=\sum_{m_1+\cdots+m_N=m}\frac{1}{S(t,\bar{t})}\left[\frac{\partial\varphi_{m_1\cdots m_N}(z)}{\partial z^\alpha}\right]_{z=t}\left[\overline{\frac{\partial\varphi_{m_1\cdots m_N}(z)}{\partial z^\beta}}\right]_{z=t}\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

即

$$\begin{aligned}H(t,\bar{t})&=[h_{\alpha\bar{\beta}}(t,\bar{t})]_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N}\\&=\frac{1}{S(t,\bar{t})}J(t)J(t)^\dagger,\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

其中函数方阵

$$J(t)=\left[\frac{\partial(\varphi_{1,0,\cdots,0}(z),\cdots,\varphi_{0,\cdots,1}(z))}{\partial(z^1,\cdots,z^N)}\right]_{z=t}.$$

根据(4.3.3)，这是一三角方阵，对角线上的元素均正，故 $H(t,\bar{t})$

是正定 Hermite 方阵. 定理证毕. ▍

不知道 Cauchy-Szegö 度量与 Bergman 度量有什么关系，甚至 $\mathfrak{R}$ 是可递域时也不知道，只有当 $\mathfrak{R}$ 是一不可约典型域时，才知道有

$$S(z,\bar{z}) = K(z,\bar{z})^{C_0}, \tag{4.3.8}$$

其中 $c_0=c_0(\mathfrak{R})$ 是只与 $\mathfrak{R}$ 有关的正数，因而有

$$d\sigma^2 = c_0 ds^2 \tag{4.3.9}$$

(见《典》著中 § 3.2及 § 5.3).

似乎由定理4.3.1知，我们可以引进 $\mathfrak{R}$ 上的线丛的联络：

$$A_\alpha(z,\bar{z}) = \frac{\partial \log S(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha}, \tag{4.3.10}$$

由此知

$$h_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z}) = \frac{\partial A_\alpha(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}^\beta}. \tag{4.3.11}$$

因此按我们"诱导"的意义下，由线丛的联络 $A_\alpha(z,\bar{z})$ 诱导 $\mathfrak{R}$ 上向量丛的联络

$$B^\gamma_{\alpha\beta}(z,\bar{z}) = \frac{\partial^2 A_\alpha(z,\bar{z})}{\partial z^\beta \partial \bar{z}^\lambda} h^{\bar{\lambda}\gamma}(z,\bar{z}), \tag{4.3.12}$$

其中

$$H(z,\bar{z})^{-1} = [h^{\bar{\alpha}\beta}(z,\bar{z})]_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N}. \tag{4.3.13}$$

于是我们可引进协变微分，仍用

$$\frac{\delta}{\delta z^\alpha} \text{ 与 } \frac{\delta}{\delta \bar{z}^\beta}$$

表示之，不过要记住，这是对联络 $A_\alpha(z,\bar{z})$ 而言的，它们对权 (p,q) 的 $\begin{bmatrix} m & n \\ r & s \end{bmatrix}$ 型张量的作用分别由(4.1.26)与(4.1.27)定义，只要把那里的 $B_\alpha(z,\bar{z})$ 改为 $A_\alpha(z,\bar{z})$，把 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 改为 $B^\alpha_{\beta\gamma}$ 即可. 由于

$$\frac{\partial S(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha} - A_\alpha(z,\bar{z})S(z,\bar{z}) = 0,$$

$$\frac{\partial S(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}^\alpha} - A_{\bar{\alpha}}(z,\bar{z})S(z,\bar{z}) = 0. \tag{4.3.14}$$

似乎可以认为 $S(z,\bar{z})$ 对现在的协变微分是权 $(-1,-1)$ 的，实际上，由于 $\overline{S(w,z)}=S(z,\bar{w})$，故 $S(z,\bar{z})$ 如果是有权的，必定是权 (p,p). 问题是甚至 $\mathfrak{R}$ 可递的情形也不知道 $S(z,\bar{z})$ 是否是权 (p,p) 的标量，故 A_α 也无法证明它是线丛的联络. 因此对 $S(z,\bar{z})$ 的协变微分就无法定义，从而就不能用对 $S(w,\bar{z})$ 的协变微分来构造 $A(\mathfrak{R})$ 的在 $\mathfrak{C}$ 上的正交就范函数系，使得有类似于定理4.1.5的协变展开，所以只好用§3.5的对 $S(w,\bar{z})$ 的普通微分来构造在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系 $\{\varphi_\nu(z)\}$. 如 t 是 $\mathfrak{R}$ 的一个固定点，根据(3.5.31)，此正交系 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 有如下性质：

$$\left[\frac{\partial^m \varphi_{p_1\cdots p_N}(z)}{(\partial z^1)^{m_1}\cdots(\partial z^N)^{m_N}}\right]_{z=t}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}(m_1,\cdots,m_N)\subset(p_1,\cdots,p_N);\\ \text{正数}, & \text{当}(m_1,\cdots,m_N)=(p_1,\cdots,p_N).\end{cases} \tag{4.3.15}$$

如证明定理4.1.5一样可证以下定理：

定理4.3.2 设 $\mathfrak{R}$ 是 C^N 中具有特征流形 $\mathfrak{C}$ 的有界域，并存在 $\mathfrak{C}$ 上的 Cauchy-Szegö 核 $S(w,\bar{z})$，则可从 $A(\mathfrak{R})$ 中选取一个在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系 $\{\varphi_\nu(z,t)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$ 适合条件(4.3.15)，使得这在 $(w,z)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ 任一紧子集中绝对并一致收敛，并且对于任一 $f\in A(\mathfrak{C})$ 有展式

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=m}\frac{\partial^m f(t)}{(\partial t^1)^{m_1}\cdots(\partial t^N)^{m_N}}\Psi_{m_1\cdots m_N}(z,t),$$

其中

$$\Psi_{m_1\cdots m_n}(z,t)$$

$$=\sum_{(p_1,\cdots,p_N)\supseteq(m_1,\cdots,m_N)}a_{(m_1,\cdots,m_N)(p_1,\cdots,p_N)}\varphi_{p_1\cdots p_N}(t),$$

此级数当 z 在 $\mathfrak{R}$ 的任一紧子集中绝对并一致收敛.

定理中的级数展开虽然收敛是大范围的(即在整个 $\mathfrak{R}$ 收敛)，但不是协变的，它的系数可以由 Cauchy 公式(4.3.1)得知为

$$\frac{\partial^m f(t)}{(\partial t^1)^{m_1}\cdots(\partial t^N)^{m_N}}=\int_{\mathfrak{C}}f(u)\frac{\partial^m S(t,\bar{u})}{(\partial t^1)^{m_1}\cdots(\partial t^N)^{m_N}}\dot{u}. \tag{4.3.16}$$

由 Schwarz 不等式知

$$\left|\frac{\partial^m f(t)}{(\partial t^1)^{m_1}\cdots(\partial t^N)^{m_N}}\right|^2$$

$$\leqslant\left(\int_{\mathfrak{C}}|f(u)|^2\dot{}(u)\right)\int_{\mathfrak{C}}\left|\frac{\partial^m S(t,\bar{u})}{(\partial t^1)^{m_1}\cdots(\partial t^N)^{m_N}}\right|^2\dot{u}\quad .$$

定理4.3.3　设 $f\in A(\mathfrak{R})$，则有

$$\left|\frac{\partial^m f(t)}{(\partial t^1)^{m_1}\cdots(\partial t^N)^{m_N}}\right|^2$$

$$\leqslant V(\mathfrak{C})\left(\sup_{v\in\mathfrak{C}}|f(v)|^2\right)\int_{\mathfrak{C}}\left|\frac{\partial^m S(t,\bar{u})}{(\partial t^1)^{m_1}\cdots(\partial t^N)^{m_N}}\right|^2\dot{u},$$

$$m_1+\cdots+m_N=m=0,1,2,\cdots.$$

这是 Cauchy 不等式的推广. 因为展式不是协变的，很难进一步再讨论了. 但当 $\mathfrak{R}$ 是一个不可约典型域，根据(4.3.8)，$S(z,\bar{z})$ 是权$(-c_0,-c_0)$的标量. 根据(4.3.9)，我们不妨取 Bergman 度量 ds^2代替 Cauchy-Szegö 度量，因为两者只差一个常数因子 c_0. 于是协变微分$\frac{\delta}{\delta z^\alpha}$与$\frac{\delta}{\delta \bar{z}^\beta}$的定义可以如§4.1一样，由 $B_\alpha(z,\bar{z})$及其诱导(按我们的意义)诱出的 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z,\bar{z})$来定义，此时$\frac{\delta S(z,\bar{z})}{\delta z^\alpha}$有定义，并且

$$\frac{\delta S(z,\bar{z})}{\delta z^\alpha}=\frac{\partial S(z,\bar{z})}{\delta z^\alpha}-c_0\frac{\partial\log K(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha}S(z,\bar{z})=0,$$

$$\frac{\delta S(z,\bar{z})}{\delta\bar{z}^\beta}=0.$$

此外，$\frac{\delta^m S(z,\bar{t})}{(\delta\bar{t}^1)^{m_1}\cdots(\delta\bar{t}^N)^{m_N}}$，$m_1+\cdots+m_N=m=0,1,2,\cdots$

$$\tag{4.3.17}$$

也有定义. 我们把 t 点固定，把上面的函数系在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范化，如§4.1一样，则得到一组函数系$\{\varphi_{m_1\cdots m_N}(z)\}$，它适合

$$\int_{\mathfrak{C}}\varphi_{m_1\cdots m_N}(u)\overline{\varphi_{p_1\cdots p_N}(u)}\dot{u}=\delta_{m_1p_1}\cdots\delta_{m_Np_N},\tag{4.3.18}$$

并且

$$\left[\frac{\delta^m \varphi_{m_1\cdots m_N}(z)}{(\delta z^1)^{p_1}\cdots(\delta z^N)^{p_N}}\right]_{z=t}$$

$$=\begin{cases}0，当(p_1,\cdots,p_N)\subset(m_1,\cdots,m_p);\\ 正数，当(p_1,\cdots,p_N)=(m_1,\cdots,m_p).\end{cases} \tag{4.3.19}$$

此外，如定理3.5.2一样可证

$$S(w,\bar{z})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(w)\overline{\varphi_\nu(z)}$$

在$(w,z)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ 的任一紧子集绝对并一致收敛，而且 $f\in A(\mathfrak{R})$ 在 $\mathfrak{R}$ 有协变的大范围展开，即以下定理：

定理4.3.4 设 $\mathfrak{R}$ 是一个不可约的典型域，t 是 $\mathfrak{R}$ 中的一固定点. 在 $A(\mathfrak{R})$中的选取一组在 $\mathfrak{C}$ 上正交就范函数系

$$\{\varphi_{m_1\cdots m_N}(z,t)\}_{m_1+\cdots+m_N=m=0,1,2,\cdots}$$

适合条件(4.3.19)，使得任一 $f\in A(\mathfrak{R})$能展开为

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=m}\frac{\delta^m f(t)}{(\delta t^1)^{m_1}\cdots(\delta t^N)^{m_N}}\Psi_{m_1\cdots m_N}(z,t),$$

其中

$$\Psi_{m_1\cdots m_N}(z,t)$$
$$=\sum_{(p_1,\cdots,p_N)\supseteq(m_1,\cdots,m_N)}a_{(m_1\cdots m_N)(p_1\cdots p_N)}\varphi_{p_1\cdots p_N}(z,t).$$

此级数在 $z\in\mathfrak{R}$ 的任一紧子集绝对并一致收敛.

这个定理与定理4.1.5不同之处，只是$\{\varphi_\nu(z)\}$在特征流形 $\mathfrak{C}$ 上正交就范，即(4.5.18)式，而定理4.1.5的$\{\varphi_\nu(z)\}$是在域 $\mathfrak{D}$ 上正交就范.

相应于定理4.1.6有以下定理：

定理4.3.5 设 $f\in A(\mathfrak{R})$，$\mathfrak{C}$ 是不可约典型域 $\mathfrak{R}$ 的特征流形，则

$$\left|\frac{\delta^m f(z)}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}u_1^{\alpha_1}\cdots u_m^{\alpha_m}\right|^2$$

$$\leqslant V(\mathfrak{R})\left(\sup_{v\in\mathfrak{C}}|f(v)|\right)^2\int_{\mathfrak{C}}\left|\frac{\delta^m S(z,\bar{u})}{\delta z^{\alpha_1}\cdots\delta z^{\alpha_m}}u_1^{\alpha_1}\cdots u_m^{\alpha_m}\right|^2\dot{u},$$

其中 $u_1^\alpha,\cdots,u_m^\alpha$ 是任意的 m 个向量.

这定理与定理4.1.6不同之处是 $S(w,\bar{z})=K(w,z)^{c_0}$ 代替 $K(z,\overline{w})$,而在 $\mathfrak{C}$ 上积分代替在 $\mathfrak{D}$ 上积分. 定理4.1.8与定理4.1.9作相应的改变也有相应的定理,这里从略.

§4.4 Hanack 不等式

在§3.6中已经提到,如果 C^N 有界域 $\mathfrak{R}$ 有特征流形 $\mathfrak{C}$,并有 Cauchy-Szegö 核 $S(w,\bar{z})$,则

$$P(z,u)=\frac{|S(z,\bar{u})|^2}{S(z,\bar{z})},u\in\mathfrak{C}, \tag{4.4.1}$$

对 z 作用 Bergman 度量的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 不见得为零,即不见得有

$$\Delta_z P(z,u)=0, \tag{4.4.2}$$

到目前为止,只知道 $\mathfrak{R}$ 为对称有界域时为真(见文献[25]、[33]). 在这里只考虑 $\mathfrak{R}$ 是不可约的典型域,对两个16维与27维的例外域,虽然也可用矩阵表示出来(见文献[76]、[79]),但太复杂,故不收集到本书中.

这里的 Δ 是作用于函数,故

$$\Delta=\frac{1}{4}\delta\mathrm{d}=\frac{1}{2}\bar{\partial}^*\bar{\partial}=T^{\bar{\beta}\alpha}(z,\bar{z})\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}, \tag{4.4.3}$$

因为 Bergman 度量是 Kähler 度量(参阅附录).

在 $\mathfrak{R}$ 中可微分函数 f 称为调和函数,如 f 适合方程

$$\Delta f(z)=0. \tag{4.4.4}$$

在文献[25]中证明了在 $\mathfrak{R}$ 中调和并在 $\overline{\mathfrak{R}}$ 连续的函数 f 有积分表示

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}}f(u)P(z,u)\dot{u}, \tag{4.4.5}$$

并且

$$\lim_{z\to v\in\mathfrak{C}}\int_{\mathfrak{C}} f(u)P(z,u)\dot{u} = f(v). \tag{4.4.6}$$

要对这类调和函数作估计，需要知道 $P(z,u)$ 的具体表达式. 当 $\mathfrak{R}$ 为 $\mathfrak{R}_I(m,n)(m\leqslant n)$，$R_{\mathrm{II}}(m)$ 或 $R_{\mathrm{III}}(m)$ 时有

$$P(z,u) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})}\left[\frac{\det(I-ZZ^{\dagger})}{|\det(I-UZ^{\dagger})|^2}\right]^{\alpha(\mathfrak{R})} \tag{4.4.7}$$

$(z\in\mathfrak{R},U\in\mathfrak{C})$（见《典》著中 §5.3），

$\alpha(\mathfrak{R}) = n$，当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$，$m\leqslant n$；

$\alpha(\mathfrak{R}) = \dfrac{m+1}{2}$，当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$；

$$\alpha(\mathfrak{R}) = \begin{cases}\dfrac{m-1}{2}, \text{当 } \mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m), m \text{ 为奇数;} \\ m/2, \text{当 } \mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m), m \text{ 为偶数.}\end{cases} \tag{4.4.8}$$

此时 $UZ^{\dagger}$ 是 $m\times m$ 方阵，$ZZ^{\dagger}<I$，$UU^{\dagger}=I$，故

$$\lambda_m^2 I \leqslant UZ^{\dagger}(UZ^{\dagger})^{\dagger} \leqslant \lambda_1^2 I, \tag{4.4.9}$$

其中 $\lambda_1^2,\cdots,\lambda_m^2$ 是 $ZZ^{\dagger}$ 的特征根，适合

$$1>\lambda_1^2\geqslant\lambda_2^2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m^2\geqslant 0. \tag{4.4.10}$$

因此，如 c 是 $UZ^{\dagger}$ 的任一特征根，即有单位特征向量 u，使得

$$uUZ^{\dagger} = cu,$$

故有

$$\lambda_m^2 \leqslant |c|^2 \leqslant \lambda_1^2. \tag{4.4.11}$$

如令 $c_1,\cdots,c_m$ 为 $UZ^{\dagger}$ 的特征根，则有

$$\frac{\det(I-ZZ^{\dagger})}{|\det(I-UZ^{\dagger})|^2} = \frac{\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)}{\prod_{j=1}^{m}|1-c_j|^2}.$$

由(4.4.7)、(4.4.9)与(4.4.10)有如下定理：

定理4.4.1 （Hanack 不等式） 当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$ $(m\leqslant n)$，$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 或 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$ 时

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C})}\left[\frac{1-\lambda_1^2}{(1+\lambda_1)^2}\right]^{m\alpha(\mathfrak{R})}$$

$$\leqslant P(Z,U)\leqslant \frac{1}{V(\mathfrak{C})}\left[\frac{1-\lambda_m^2}{(1-\lambda_1)^2}\right]^{m\alpha(\mathfrak{R})},$$

其中 $\alpha(\mathfrak{R})$由(4.4.8)定义.

λ_1^2等于 $ZZ^\dagger$ 的最大特征根；λ_m^2 等于 $ZZ^\dagger$ 的最小特征根.

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_N(N)$时,

$$P(z,u)=\frac{1}{V(\mathfrak{C})}\frac{(1+|zz'|^2-2zz^\dagger)^{N/2}}{|1+zz'\overline{uu'}-2zu^\dagger|^N} \quad (4.4.12)$$

(见《典》著中(5.3.28)式). 由于

$$\rho(\lambda;z,\bar{u})=\lambda^2-2zu^\dagger\lambda+zz'\overline{uu'}$$
$$=[\lambda-\lambda_1(z,\bar{u})][\lambda-\lambda_2(z,\bar{u})], \quad (4.4.13)$$

其中

$$\lambda_1(z,\bar{u})=zu^\dagger+\sqrt{(zu^\dagger)^2-zz'\overline{uu'}},$$

$$\lambda_2(z,\bar{u})=zu^\dagger-\sqrt{(zu^\dagger)^2-zz'\overline{uu'}}. \quad (4.4.14)$$

由(4.4.13)知,当 $z\in\mathfrak{R}_N$时,

$$\rho(1;z,\bar{z})=1-2z\bar{z}'+|zz'|^2$$
$$=(1-|zz'|^2)-2(z\bar{z}'-|zz'|^2)$$
$$=[1-\lambda_1(z,\bar{z})][1-\lambda_2(z,\bar{z})]>0. \quad (4.4.15)$$

及$1-|zz'|>0$,故 $zz^\dagger<\frac{1+|zz'|}{2}<1$. 由(4.4.14)知

$$\lambda_2(z,\bar{z})=zz^\dagger-\sqrt{(zz^\dagger)^2-|zz'|^2}\leqslant zz^\dagger<1, \quad (4.4.16)$$

而由(4.4.15)知,必须

$$\lambda_1(z,\bar{z})=zz^\dagger+\sqrt{(zz^\dagger)^2-|zz'|^2}<1. \quad (4.4.17)$$

由于

$$\lambda_2(z,\bar{z})\leqslant\lambda_1(z,\bar{z}), \quad (4.4.18)$$

故 $\mathfrak{R}_N(N)$可以如下定义:

$$\mathfrak{R}_N(N)=\{z\in C^N\,|\,\lambda_1(z,\bar{z})<1\}. \quad (4.4.19)$$

根据引理4.2.6，当 $z\in\mathfrak{R}_N$，$w\in\mathfrak{R}_N$ 时，

$$\rho(1;z,\overline{w}) = [1-\lambda_1(z,\overline{w})][1-\lambda_2(z,\overline{w})]\neq 0,$$

因此

$$|\lambda_1(z,\overline{w})|\neq 1,\ |\lambda_2(z,\overline{w})|\neq 1.$$

由引理4.2.1，有

$$|\lambda_1(z,\overline{w})|<1,\ \text{当}(z,w)\in\mathfrak{R}_N\times\mathfrak{R}_N; \quad (4.4.20)$$

同理

$$|\lambda_2(z,\overline{w})|<1,\ \text{当}(z,w)\in\mathfrak{R}_N\times\mathfrak{R}_I. \quad (4.4.21)$$

当 $w=u\in\mathfrak{C}_N$，即 $u=e^{i\theta}x$，x 为实的，$xx'=1$. 存在实正交方阵 Γ，使

$$z=(z_1,z_2,z_3,z_4,0,\cdots,0)\Gamma,$$
$$u=e^{i\theta}(x_1,x_2,x_3,x_4,0,\cdots,0)\Gamma,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1.$$

根据(4.2.51)

$$\begin{aligned}\rho(1;z,\overline{u}) &= \det(I-WU^{\dagger})\\ &= [1-\lambda_1(z,\overline{u})][1-\lambda_2(z,\overline{u})], \quad (4.4.22)\end{aligned}$$

其中

$$Z=\begin{pmatrix} z_1+iz_2 & iz_3-z_4\\ iz_3+z_4 & z_1-iz_2\end{pmatrix},$$
$$U=e^{i\theta}\begin{pmatrix} x_1+ix_2 & ix_3-x_4\\ ix_3+x_4 & x_1-ix_2\end{pmatrix}$$

适合 $ZZ^{\dagger}<I$，$UU^{\dagger}=I$. 根据(4.4.11)知

$$\lambda_2(z,\overline{z})\leqslant|\lambda_j(z,\overline{u})|\leqslant\lambda_1(z,\overline{z}),\ j=1,2. \quad (4.4.23)$$

定理4.4.2 典型域 $\mathfrak{R}_N(N)$ 的 Poisson 核可写为

$$P(z,u)=\frac{1}{V(C_N)}\cdot\frac{[1-\lambda_1(z,\overline{z})]^{N/2}[1-\lambda_2(z,\overline{z})]^{N/2}}{|[1-\lambda_1(z,\overline{u})][1-\lambda_2(z,\overline{u})]|^N},$$

有 Hanack 不等式

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_N)}\left[\frac{1-\lambda_1(z,\overline{z})}{(1+\lambda_1(z,\overline{z}))^2}\right]^N\leqslant P(z,\overline{u})$$

$$\leqslant \frac{1}{V(\mathfrak{C}_N)}\left[\frac{1-\lambda_2(z,\bar{z})}{(1-\lambda_1(z,\bar{z}))^2}\right]^N,$$

其中 $\lambda_1(z,\bar{z})$与 $\lambda_2(z,\bar{z})$的定义见(4.4.16)与(4.4.17).

由(4.4.19)知,$\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)$可以用一个函数 $\lambda_1(z,\bar{z})$定义.其他三类典型域也可以用一个函数定义,令

$$\lambda_1(z,\bar{z}) = \{\sup_{uu^\dagger=1} uZZ^\dagger u^\dagger\}^{1/2}, \tag{4.4.24}$$

其中 $u=(u^1,\cdots,u^m)$是单位向量,上式即是 $ZZ^\dagger$ 的最大特征根.

定理4.4.3 设 $\mathfrak{R}$ 为不可约的对称典型域,则

$$\mathfrak{R} = \{z \in \mathrm{C}^N | \lambda_1(z,\bar{z}) < 1\},$$

其中

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$时,$\lambda_1(z,\bar{z})$由(4.4.24)定义;

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$时,$\lambda_1(z,z)$由(4.4.24)对 $Z=Z'$定义;

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$时,$\lambda_1(z,\bar{z})$由(4.4.24)对 $Z=-Z'$定义;

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)$时,$\lambda_1(z,\bar{z})$由(4.4.17)定义.

王大明[68]在30多年前曾证明了如下定理:

定理4.4.4 若令 $C_{\mathfrak{R}}(z,w)$是不可约对称典型域 $\mathfrak{R}$ 的 Carathéo*d*ory 度量,则

$$C_{\mathfrak{R}}(0,z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_1(z,\bar{z})}{1-\lambda_1(z,\bar{z})}.$$

证 根据 Carathéo*d*ory 度量的定义(见文献[37]中§3.4),如 z_1、$z_2\in\mathfrak{R}$,此两点的 Carathéo*d*ory 距离为

$$C_{\mathfrak{R}}(z_1,z_2) = \sup_{\varphi\in\mathfrak{S}(\mathfrak{R})} E(\varphi(z_1),\varphi(z_2)), \tag{4.4.25}$$

其中 $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$为所有在 $\mathfrak{R}$ 全纯,绝对值小于1的函数类,而 $E(t_1,t_2)$为单位圆盘 $|t|<1$中的两个点 t_1与 t_2的非欧距离,即

$$E(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\dfrac{t_1-t_2}{1-\bar{t}_1t_2}\right|}{1-\left|\dfrac{t_1-t_2}{1-\bar{t}_1t_2}\right|}. \tag{4.4.26}$$

由于 Carathéodory 度量是在双全纯映照下不变的,而 $\mathfrak{R}$ 是可递

域，因此不妨假定

$$Z_1 = 0,\ Z_2 = \Lambda,\ \Lambda = \left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}, 0\right),$$

$1>\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant 0$，当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{I}},\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$时；

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$时，

$$\Lambda = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{\frac{m}{2}} \\ -\lambda_{\frac{m}{2}} & 0 \end{pmatrix}, m \text{ 为偶数}; \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{\frac{m-1}{2}} \\ -\lambda_{\frac{m-1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \oplus 0, m \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$时，

$$z_2 = \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2i}, 0, \cdots, 0\right), 1 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 0.$$

如果 $\varphi_1(z)\in\mathfrak{E}(\mathfrak{R})$，则

$$\varphi(z) = \frac{\varphi_1(z)-\varphi_1(0)}{1-\overline{\varphi_1(0)}\varphi_1(z)} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{R}),$$

但是 $\varphi(0)=0$. 故我们只须求

$$C_{\mathfrak{R}}(0,\Lambda) = \sup_{\varphi\in\mathfrak{E}_0(\mathfrak{R})} E(\varphi(0),\varphi(\Lambda))$$

即可，其中 $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{R})$是在 $\mathfrak{R}$ 全纯绝对值小于1且 $\varphi(0)=0$的函数类.

由于 $\mathfrak{R}$ 有如此性质，当 $z\in\mathfrak{R}$ 时，则 $tz\in\mathfrak{R}$，其中$|t|\leqslant 1$. 因此如 $\varphi(z)\in\mathfrak{E}_0(\mathfrak{R})$，则 $\varphi(tz)\in\mathfrak{E}_0(\mathfrak{R})$. 故当 $\varphi(tz)$看作是 t 的单位圆盘上的全纯函数，适合$|\varphi(tz)|<1$，当$|t|\leqslant 1$，$\varphi(0)=0$，根据单复变数的 Schwarz 引理知$|\varphi(tz)|\leqslant|t|$，当$|t|\leqslant 1$. 取 $t=\lambda_1$，有

$$C_{\mathfrak{R}}(0,\Lambda) \leqslant \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}.$$

另一方面，取 $\varphi(Z)=z_{11}$，$Z=(z_{j\alpha})$，当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{I}},\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$；$\varphi(Z)=z_{12}$，当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$；$\varphi(Z)=z_1+iz_2$，当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$.

根据定义

$$C_{\mathfrak{R}}(0,\Lambda) \geqslant \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1},$$

故有

$$C_{\mathfrak{R}}(0,\Lambda) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}.\quad 定理证毕. \quad \blacksquare$$

系4.4.5　设 $\mathfrak{R}$ 是不可约典型域，则 $\lambda_1(z,\bar{z}), z\in\mathfrak{R}$，是多元次调和函数，因此 Carathéodory 度量 $C_{\mathfrak{R}}(0,z)$ 也是 $z\in\mathfrak{R}$ 的多元次调和函数.

证　$\mathfrak{R}$ 是一星型域，并且当 $z\in\mathfrak{R}$ 时，有 $tz\in\mathfrak{R}$，只要 $|t|<1$. 根据定义，

$$\lambda_1(tz,t\bar{z}) = |t|^2\lambda_1(z,\bar{z}).$$

由此知

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial \bar{t}}\lambda_1(tz,\overline{tz}) \geqslant 0, 并且 > 0, 当 z\neq 0.$$

因此 $\lambda_1(z,\bar{z})$ 是多元次调和函数. 可知

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_1(z,\bar{z})}{1-\lambda_1(z,\bar{z})}$$

也是多元次调和函数，系被证明.　$\blacksquare$

系4.4.6　设

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \cdots \times \mathfrak{R}_p,$$

其中每一 $\mathfrak{R}_j$ 皆是不可约典型域，$\lambda_1^{(j)}(z_j,\bar{z}_j)$ 是定理4.4.3中定义 $\mathfrak{R}_j$ 的多元次调和函数，则

$$\mathfrak{R} = \{z\in C^N \mid \lambda_1(z,\bar{z}) < 1\},$$

其中 $N=N_1+\cdots+N_p$，$\mathfrak{R}_j$ 的维数是 N_j，

$$\lambda_1(z,\bar{z}) = \max\{\lambda_1^{(1)}(z,\bar{z}),\cdots,\lambda_1^{(p)}(z,\bar{z})\};$$

并且 $\mathfrak{R}$ 的 Carathéodory 度量由原点到 $\mathfrak{R}$ 任一点为

$$C_{\mathfrak{R}}(0,z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_1(z,\bar{z})}{1-\lambda_1(z,\bar{z})}.$$

根据多元次调和函数的理论，$\lambda_1(z,\bar{z})$ 与 $C_{\mathfrak{R}}(0,z)$ 也是多元次调和函数.

§4.5 典型域的 $\bar{\partial}$ 方程解的估值

设 $\mathfrak{D}$ 是 C^N 中有界多项式域适合非零条件，根据定理3.4.1，$\mathfrak{D}$ 必定是全纯域，并且可构造全纯的 Leray 映照. 根据定理3.3.2，$\bar{\partial}$ 问题的解有积分表示. 在此定理中，$\psi_0(z)$是任意的全纯函数，现取之为0，即积分

$$\psi(w)=\frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N}\int_{(z,\lambda)\in\partial\mathfrak{D}\times[0,1]}f(z)\wedge\omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi}+\lambda\overset{1}{\xi})\wedge\omega(z)$$
$$-\frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N}\int_{z\in\mathfrak{D}}f(z)\wedge\omega_1(\overset{0}{\xi})\wedge\omega(z) \qquad (4.5.1)$$

适合方程

$$\bar{\partial}\psi=f, \qquad (4.5.2)$$

其中 f 适合 $\bar{\partial}f=0$. 这里 $\mathfrak{D}$ 是$\{z\in C^N\mid\rho(z,\bar{z})>0\}$的连通有界分量，适合 $\rho(w,\bar{z})\neq 0$，当$(w,z)\in\mathfrak{D}\times\bar{\mathfrak{D}}$，$\rho(w,\bar{z})$是多项式，Henkin 的方法[28]可用以对(4.5.1)的积分进行估值，作者没有得出更精确的结果，重复 Henkin 的方法来估值意义不大，所以作者只限于考虑 $\mathfrak{D}=\mathfrak{R}$ 是不可约的典型域情形，在这样具体的域，可得出比一般方法所得到的更精确的结果.

此外，(4.5.1)中第二个积分的估值，由于 $\overset{0}{\xi}$定义的 Leray 映照是 Bochner-Martinelli 映照，这个积分的估值对任何域 $\mathfrak{D}$ 都是一样的，从文献[28]中亦可得到，我们并无新法. 故在这里只估计积分

$$\psi_1(w)=\frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N}\int_{(z,\lambda)\in\partial\mathfrak{D}\times[0,1]}f(z)$$
$$\wedge\,\omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi}+\lambda\overset{1}{\xi})\wedge\omega(z). \qquad (4.5.3)$$

令

$$\xi_\alpha=(1-\lambda)\overset{0}{\xi}_\alpha(w,z)+\lambda\overset{1}{\xi}_\alpha(w,z), \qquad (4.5.4)$$

其中

$$\overset{0}{\xi}_{\alpha} = \frac{\overline{w}^{\alpha} - \overline{z}^{\alpha}}{|w - z|^2},$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\xi}_{\alpha} = &\frac{1}{\rho(w,\overline{z})(w^{\alpha} - z^{\alpha})} \\ &\times [\rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},w^{\alpha},w^{\alpha+1},\cdots,w^N,\overline{z}) \\ &- \rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},z^{\alpha},w^{\alpha+1},\cdots,w^N,\overline{z})].\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

故

$$\begin{aligned}d\xi_{\alpha} = &(\overset{1}{\xi}_{\alpha} - \overset{0}{\xi}_{\alpha})d\lambda \\ &+ \sum_{\beta=1}^{N}\left[(1-\lambda)\frac{\partial\overset{0}{\xi}_{\alpha}}{\partial\overline{z}^{\beta}} + \lambda\frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\alpha}}{\partial\overline{z}^{\beta}}\right]\overline{dz^{\beta}} + dz^{\alpha} \text{ 的项}.\end{aligned}$$

设

$$f(z) = f_{\bar{\alpha}}\overline{dz^{\alpha}}$$

在 $\partial\mathfrak{R}\times[0,1]$上的$2n$ 次微分式只能有 $d\lambda$ 一次，dz^{α} 与$\overline{dz^{\beta}}$ 的 $2N-1$次，故

$$\begin{aligned}&f(z) \wedge \omega_1(\xi) \wedge \omega(z) \\ &= \frac{1}{(N-1)!}f(z) \wedge \delta^{1\cdots N}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{N-1}}\xi_{\alpha}d\xi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\xi_{\alpha_{N-1}} \wedge \omega(z) \\ &= \frac{1}{(N-1)!}f(z)\delta^{1\cdots N}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{N-1}}[\overset{0}{\xi}_{\alpha} + \lambda(\overset{1}{\xi}_{\alpha} - \overset{0}{\xi}_{\alpha})] \\ &\quad\wedge\left\{(\overset{1}{\xi}_{\alpha_1} - \overset{0}{\xi}_{\alpha_1})d\lambda + \left[(1-\lambda)\frac{\partial\overset{0}{\xi}_{\alpha_1}}{\partial\overline{z}^{\beta_1}} + \lambda\frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\alpha_1}}{\partial\overline{z}^{\beta_1}}\right]\overline{dz^{\beta_1}}\right\} \wedge \cdots \\ &\quad\wedge\left\{(\overset{1}{\xi}_{\alpha_{N-1}} - \overset{0}{\xi}_{\alpha_{N-1}})d\lambda + \left[(1-\lambda)\frac{\partial\overset{0}{\xi}_{\alpha_{N-1}}}{\partial\overline{z}^{\beta_{N-1}}}\right.\right. \\ &\quad\left.\left.+ \lambda\frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\alpha_{N-1}}}{\partial\overline{z}^{\beta_{N-1}}}\right]\overline{dz^{\beta_{N-1}}}\right\} \wedge \omega(z) \\ &= \frac{1}{(N-1)!}f(z)\delta^{1\cdots N}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{N-1}}\overset{0}{\xi}_{\alpha}(\overset{1}{\xi}_{\alpha_1} - \overset{0}{\xi}_{\alpha_1})\end{aligned}$$

$$\wedge\ \mathrm{d}\lambda\sum_{k=2}^{N}(1-\lambda)^{k-2}\lambda^{N-k}\cdot\frac{\partial\overset{0}{\xi}_{\alpha_2}}{\partial\bar{z}^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial\overset{0}{\xi}_{\alpha_k}}{\partial\bar{z}^{\beta_k}}$$

$$\times\frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\alpha_{k+1}}}{\partial\bar{z}^{\beta_{k+1}}}\cdots\frac{\partial\overset{1}{\xi}_{\alpha_{N-1}}}{\partial\bar{z}^{\beta_{N-1}}}\overline{\mathrm{d}z^{\beta_2}}\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\beta_{N-1}}}\wedge\omega(z)$$

$$=\frac{1}{(N-1)!}f(z)\wedge\sum_{k=1}^{N-1}(1-\lambda)^{k-1}\lambda^{N-k-1}\mathrm{d}\lambda\delta_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{N-1}}^{1\cdots N}$$

$$\times\frac{\overset{0}{\eta}_{\alpha}}{|w-z|^2}\left[\frac{\overset{1}{\eta}_{\alpha_1}}{\rho(w,\bar{z})}-\frac{\overset{0}{\eta}_{\alpha_1}}{|w-z|^2}\right]\frac{1}{|w-z|^{2(k-1)}\rho(w,\bar{z})^{N-k-1}}$$

$$\times\frac{\partial\overset{0}{\eta}_{\alpha_2}}{\partial\bar{z}^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial\overset{0}{\eta}_{\alpha_k}}{\partial\bar{z}^{\beta_k}}\cdot\frac{\partial\overset{1}{\eta}_{\alpha_{k+1}}}{\partial\bar{z}^{\beta_{k+1}}}\cdots\frac{\partial\overset{1}{\eta}_{\alpha_{N-1}}}{\partial\bar{z}^{\beta_{N-1}}}$$

$$\times\overline{\mathrm{d}z^{\beta_2}}\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\beta_{N-1}}}\wedge\omega(z),\qquad(4.5.6)$$

其中

$$\overset{0}{\eta}_{\alpha}=\overline{w}^{\alpha}-\bar{z}^{\alpha},$$

$$\overset{1}{\eta}_{\alpha}=\frac{1}{w^{\alpha}-z^{\alpha}}[\rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},w^{\alpha},w^{\alpha+1},\cdots,w^N,\bar{z})$$

$$-\rho(z^1,\cdots,z^{\alpha-1},z^{\alpha},w^{\alpha+1},\cdots,w^N,\bar{z})]\qquad(4.5.7)$$

都是 w、$\overline{w}$、z、$\bar{z}$ 的多项式.

令

$$A_{\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_{N-1}}^{(k)}(w,z)=\frac{-1}{(N-1)!}\delta_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{N-1}}^{1\cdots N}\overset{0}{\eta}_{\alpha}\overset{1}{\eta}_{\alpha_1}$$

$$\times\frac{\partial\overset{0}{\eta}_{\alpha_2}}{\partial\bar{z}^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial\overset{0}{\eta}_{\alpha_k}}{\partial\bar{z}^{\beta_k}}\frac{\partial\overset{1}{\eta}_{\alpha_{k+1}}}{\partial\bar{z}^{\beta_{k+1}}}\cdots\frac{\partial\overset{1}{\eta}_{\alpha_{N-1}}}{\partial\bar{z}^{\beta_{N-1}}}.\qquad(4.5.8)$$

这是 w、$\overline{w}$ 与 z、$\bar{z}$ 的多项式，当 $(w,z)\in\mathfrak{R}\times\partial\mathfrak{R}$ 时必然是有界的，利用积分

$$\int_0^1(1-\lambda)^p\lambda^q\mathrm{d}\lambda=\frac{p!q!}{(p-q+1)!}$$

得知(4.5.6)在 $(z,\lambda)\in\partial\mathfrak{R}\times[0,1]$ 的积分为

$$\int_{z\in\partial\mathfrak{R}}\int_{\lambda\in[0,1]}f(z)\wedge\omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi}+\lambda\overset{1}{\xi})\wedge\omega(z)$$

$$
= \frac{1}{(N-1)!}\int_{z\in\partial\mathfrak{R}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(k-1)!(N-k-1)!}{(N-1)!}
$$

$$
\times \frac{1}{|w-z|^{2k}\rho(w,\bar{z})^{N-k}} A^{(k)}_{\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_{N-1}}(w,\bar{z})\delta^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_N}_{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{N-1}} f_{\bar{\beta}_1}
$$

$$
\wedge \overline{dz^{\gamma_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\gamma_{N-1}}} \wedge \omega(z). \tag{4.5.9}
$$

由于 $\mathfrak{R}$ 的边界

$$
\partial\mathfrak{R} = \{z \in \mathfrak{R} \mid \rho(z,\bar{z}) = 0\}
$$

是逐段光滑的，在 $\partial\mathfrak{R}$ 的$2N-1$维流形上

$$
\overline{dz^{\gamma_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\gamma_{N-1}}} \wedge \omega(z) = B^{\gamma_1\cdots\gamma_{N-1}}(z)\dot{z}, \tag{4.5.10}
$$

其中 $B^{\gamma_1\cdots\gamma_{N-1}}$是 $\partial\mathfrak{R}$ 上的连续函数，$\dot{z}$ 是此流形上的由 C^{2N}欧氏度量的诱导的体积元素. 由此知(4.5.9)的被积函数中除了因子 $\dfrac{1}{[w-z]^{2N-2}\rho(w,\bar{z})^N}$外，被积函数绝对值是由$|f_\alpha|$的上界 M_1乘以一个只与 $\mathfrak{R}$ 有关的上界 M_2为上界. 在 $\mathfrak{R}$ 是典型域时，此因子当 $w\in\overline{\mathfrak{R}}_r$时($0<r<1$)可以精确的估计，这里 r 是把 $\mathfrak{R}$ 向原点缩小 r 倍. 注意，$\mathfrak{R}$ 是以原点为中心的星形域.

当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1(m,n)$， $m\leqslant n$， $N=mn$，

$$
\rho(W,Z) = \det(I - WZ^{\dagger}). \tag{4.5.11}
$$

当 $W\in\overline{\mathfrak{R}}_r$ 时，即

$$
WW^{\dagger} \leqslant r^2 I,\ 0<r<1.
$$

令 $\lambda_1(WZ^{\dagger}),\cdots,\lambda_m(WZ^{\dagger})$ 为 $WZ^{\dagger}$ 的特征根. 根据不等式(4.4.11)，有

$$
|\lambda_j(WZ^{\dagger})| \leqslant \lambda_1(WW^{\dagger}) \leqslant r, \tag{4.5.12}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
|\det(I - WZ^{\dagger})| &= |[1-\lambda_1(WZ^{\dagger})]\cdots[1-\lambda_m(WZ^{\dagger})]| \\
&\geqslant (1-r)^m.
\end{aligned} \tag{4.5.13}
$$

另一方面，

$$
|w-z|^2 = \mathrm{tr}[(W-Z)(W-Z)^{\dagger}].
$$

当 $Z\in\partial\mathfrak{R}$，它必可写为

$$
Z = U\Lambda(I^{(m)},0)V,
$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad 1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \geqslant 0. \tag{4.5.14}$$

此外，当 $W \in \mathfrak{R}_r$ 时，则

$$W_1 = U^\dagger W V^\dagger \in \mathfrak{R}_r. \tag{4.5.15}$$

令 W_1 的第 j 行第 α 列元素为 $w_{j\alpha}^{(1)}$，则

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{n} |w_{1\alpha}^{(1)}|^2 \leqslant r^2, \\ &|w - z|^2 = \operatorname{tr}\{[W_1 - (\Lambda, 0)][W_1 - (\Lambda, 0)]^\dagger\} \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{m} |w_{jj}^{(1)} - \lambda_j|^2 + \sum_{j \neq \alpha} |w_{j\alpha}^{(1)}|^2 \\ &\qquad \geqslant |w_{11}^{(1)} - \lambda_1|^2 \geqslant (1 - |w_{11}^{(1)}|)^2 \geqslant (1 - r)^2. \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

由(4.5.13)与(4.5.16)得知

$$\begin{aligned} |w - z|^{2k} \rho(w, \bar{z})^{N-k} &\geqslant (1 - r)^{2k} (1 - r)^{m(N-k)} \\ &\geqslant (1 - r)^{mN} \quad (\text{当 } m \geqslant 2), \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

这由于 $k \leqslant N$.

由(4.5.17)与(4.5.10)得知，当 $W \in \mathfrak{R}_r$ 时，有

$$\left| \frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N} \int_{(w,\lambda) \in \partial\mathfrak{R} \times [0,1]} f(z) \wedge \omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi} + \lambda\overset{1}{\xi}) \wedge \omega(z) \right| \leqslant M_0 \frac{|f|_{\partial\mathfrak{R}}}{(1-r)^{mN}}, \tag{4.5.18}$$

其中 M_0 是只与 $\mathfrak{R}$ 有关的正数，

$$|f|_{\partial\mathfrak{R}} = \max\{\sup_{z \in \partial\mathfrak{R}} |f_1(z)|, \cdots, \sup_{z \in \partial\mathfrak{R}} |f_N(z)|\}. \tag{4.5.19}$$

当 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 或 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$ 时，同样可证上面不等式成立，只是

$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$时不等式(4.5.18)的右端要把 m 改为$\left[\frac{m}{2}\right]$. 当 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)$时，

$$\rho(w,\bar{z}) = 1 + ww'\overline{zz'} - 2wz^{\dagger}. \qquad (4.5.20)$$

根据引理4.2.7的证明知

$$\rho(w,\bar{z}) = \det(I - WZ^{\dagger}),$$

其中 W 与 Z 皆为2×2方阵,适合

$$I - WW^{\dagger} > 0,\ I - ZZ^{\dagger} \geqslant 0.$$

当 $w\in\mathfrak{R}_r$, $z\in\partial\mathfrak{R}$ 时,则有

$$r^2I - WW^{\dagger} > 0,\ Z = U\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}V,\ 1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 0. \qquad (4.5.21)$$

于是不等式(4.5.17)化为

$$|w - z|^{2k}\rho(w,z)^{N-k} \geqslant (1 - r)^{2N}, \qquad (4.5.22)$$

故不等式(4.5.18)在 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)$亦成立,只须以 $m=2$代入.

定理4.5.1 当 $\mathfrak{R}$ 是不可约的典型域时,则 Cauchy 型积分(4.5.3)有如下的估值:

当 $w\in\mathfrak{R}_r$ $(1<r<1)$时,

$$\left|\frac{(N-1)!}{(2\pi i)^N}\int_{(z,\lambda)\in\partial\mathfrak{R}\times[0,1]} f(z)\wedge\omega_1((1-\lambda)\overset{0}{\xi}+\lambda\overset{1}{\xi})\wedge\omega(z)\right| \leqslant M_0\frac{|f|_{\partial\mathfrak{R}}}{(1-r)^{k_1(\mathfrak{R})N}},$$

其中 N 是 $\mathfrak{R}$ 的复维数, $|f|_{\partial\mathfrak{R}}$由(4.5.19)定义, M_0只与 $\mathfrak{R}$ 有关,

$$k_1(\mathfrak{R}) = \begin{cases} m, \text{当 } \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n),\ m\leqslant n \text{ 或 } \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m) \\ \qquad (\text{当 } m\geqslant 2); \\ \left[\frac{m}{2}\right], \text{当 } \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m), \left[\frac{m}{2}\right]\text{表示}\frac{m}{2}\text{ 的整数部分}; \\ 2, \text{当 } \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N). \end{cases}$$

至此,典型域 $\mathfrak{R}$ 的 $\bar{\partial}$-方程(4.5.2)的解,当 f 在 $\bar{\mathfrak{R}}$ 连续,在 $\mathfrak{R}$ 适合 $\bar{\partial}f=0$时的解(4.5.1)的一致估计就完成了,因为(4.5.1)中第二个积分的一致估计,可以引用文献[28]中的估值.

第 5 章

内切超圆坐标与积分变换

关于球与复投影空间的 Green 函数，作者曾在 60 年代初得到，并且受到陈省身先生的一篇文章[11]的启发与弓惠生一起，利用这些 Green 函数证明从 C^N 到 P^N 的全纯映照的第一与第二基本定理. 但尚未发表，十年动乱开始了，到十年动乱结束，发现伍鸿熙和Griffiths在这方面已做了不少工作，特别是 Griffiths 已证明了比从 C^N 到 P^N 更广泛的第一与第二基本定理. 这使得我们文章的意义就不大了，虽然方法不同及具有较精确的结果，但那时弓惠生已经改行搞计算机去了，无意于发表，故就作罢论. 从 60 年代初开始，作者考虑秩≥2 的 Hermite 对称空间的 Green 函数，但发现，即使是最简单的秩为 2 的 Hermite 对称空间双圆盘 $D_2=\{(z_1,z_2)\in C^2 \mid |z_1|<1, |z_2|<1\}$对于 Bergman 度量的 Green 函数也无法构造出来. 十年动乱中研究工作中断，这个考虑也放到一旁了，直到 1980 年 2 月，J. Kohn 邀请作者访问 Princeton 大学一个月，因为看到E. M. Stein的书中用到球的 Green 函数，就请教他有无办法构造双圆盘的 Green 函数，他认为尚无办法. 以后俗务缠身，到 1986 年，才认真再考虑，其时才悟到要构造两个对称空间的拓扑积的 Green 函数，若知道此两空间的热核，把其乘积对 t 从 0 到 ∞作积分便得出所求的 Green 函数了. 故决心构造不可约对称空间的热核，自然先从超球开始(见文献[47]). 后来与洪毅一起(见文献[52])构造了典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的热核. 但在后一篇文章中与前一篇的办法截然不同，在前一篇文章中是应用内切超圆坐标与积分变换构造的，在后一篇文章中是用前一篇的结果以十分巧妙的技巧来构造 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,m)(n\geqslant m>1)$的热核. 后一篇文章中的方法

虽然可以用到一些对称空间上(见文献[48]),但对另外一些对称空间却无效,例如对典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$、$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$及 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)$皆无效.这使得作者又回到内切超圆坐标与积分变换的方法上来.

首先,作者注意到,Laplace-Beltrami 算子 Δ 对于 C^N 有界域的 Bergman 度量可以写为

$$\Delta f = T^{\bar{\beta}\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\left[\sqrt{g}\,T^{\bar{\beta}\alpha}\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}\right],$$

其中 g 是把 Bergman 度量看作是黎曼度量时度量张量的行列式.这种形式的表达不仅对全纯的坐标成立,且对实的坐标也成立,即

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\,g^{jk}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right),$$

其中

$$ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k,\ g = \det(g_{jk}).$$

因此,我们考虑调和函数 f,即适合方程

$$\Delta f = 0$$

的函数,或考虑热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

的解 f,应考虑所有可容许坐标,而不是仅考虑复结构所容许的坐标,即调和函数或热方程的解与复结构无关.因此考虑 Hermite 对称空间这些函数时,与考虑任意黎曼对称空间的函数没有什么区别.早在 1959 年[25]就知道了实对称空间 $I-XX'>0$ 调和函数的 Poisson 核一样存在.

基于这种看法,作者还悟到另一个许久想不通的问题,自华罗庚 1956 年开始[23],于 1959 年与作者一起完成的典型域调和函数论中[25],以 Poisson 核解决了 Dirichlet 问题.同年 Pjatetski-Shapiro 提出了 É. Cartan 猜想的反例,即举出许多有界可递域不是对称的.很自然的想到这些域的 Poisson 核是否对 Bergman 度量的算子 Δ 也是调和函数,可用以解决相应的 Dirichlet 问题?但是 1965 年陆汝钤[54]举出了反例,即域

$$S_{p,m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^{p\times p}, U \in \mathbb{C}^{p\times m}, V \in \mathbb{C}^{n\times p} \mid$$

$$\frac{1}{2}(Z - Z^{\dagger}) - \frac{1}{2}UU^{\dagger} - \frac{1}{2}V^{\dagger}V\} > 0$$

是非对称的，但全纯等价于有界域的可递域，不过他按特征流形 $\mathfrak{C}$ 的不变体积元素来定义的 Poisson 核并不是调和函数. 这里所说的“不变”，只是指在全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(S_{p,m,n})$ 变换下不变的 $\mathfrak{C}$ 上的体积元素. 因此他猜测，Poisson 核是否是调和函数，似乎是判别一个有界可递域是否是对称的标准. 1980 年，许以超[74]在很大一类称之为 N-Siegel 有界可递域中证明了此猜测是成立的. 这当然是很漂亮的结果. 但是作者仍然对如此构造的 Poisson 核不是调和函数而感到遗憾，正如许以超称之为“形式的”Poisson 核，它不是真正的 Poisson 核，因此 Poisson 公式不成立. 直到写本书时，作者才悟到 Laplace-Beltrami 算子 Δ 竟然可用实的坐标表达. 而 Δ 是由黎曼度量所诱导的，能否引进不一定是 Bergman 度量的黎曼度量使得由相应定义的调和函数具有 Poisson 核，它本身也是调和函数呢？这使作者回忆起 Die*d*erlich[13]在 1975 年提出的一个问题：即 $\mathbb{C}^N$ 中有界域 $\mathfrak{D}$ 的 Bergman 度量的等度变换是否一定是 $\mathfrak{D}$ 的全纯自同构？作者在 1979 年才看到他的文章，立刻举出了一个反例，即双圆盘的 Bergman 度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2|\mathrm{d}z_1|^2}{(1-|z_1|^2)^2} + \frac{2|\mathrm{d}z_2|^2}{(1-|z_2|^2)^2}$$

在变换

$$z_1 \mapsto z_1, \quad z_2 \mapsto \bar{z}_2$$

下是不变的，但这非全纯变换：对 z_1 是全纯，对 z_2 是反全纯. 因此，我们考虑不变度量时，可以考虑包括部分全纯、部分反全纯的变换下或更广的变换下不变的度量. 以非对称的可递域 $S_{p,m,n}$ 为例，作变换

$$\psi: Z_1 = Z,\ U_1 = U,\ V_1 = V^{\dagger},$$

其中 V_1 为 $p\times n$ 矩阵，这是部分全纯、部分反全纯的变换，把 $S_{p,m,n}$ 一一地映为 $\mathfrak{R}_{\text{I}}(p, p+m+n)$，后者对 Bergman 度量的 Poisson

核是存在的，由 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(p,p+m+n)$ 的 Bergman 度量诱导出 $S_{p,m,n}$ 的黎曼度量，则此度量在变换 $\psi^{-1}\circ\varphi\circ\psi,\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})$ 下不变，由它诱导的 Laplace-Beltrami 算子 Δ_1 也在 $\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\psi$ 下不变，因此 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(p,p+m+n)$ 的 Poisson 核诱导出 $S_{p,m,n}$ 的 Poisson 核，它是对 Δ_1 的调和函数. 不过，$\psi^{-1}\circ\varphi\circ\psi$ 不是双全纯变换，它是部分全纯、部分反全纯的变换，此 Laplace-Beltrami 算子 Δ_1 并非内蕴的 (intrinsic)，但是部分全纯函数或部分反全纯函数 f（即适合 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha}=0$ 或 $\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}=0$）必适合 $\Delta_1 f=0$，自然能由 Poisson 公式表示了. 此外，这里还提出了一个有趣的问题：即非对称有界可递域是否皆能经一个实解析变换把它一一地映为一个对称空间呢？一些例子说明了是可以的.

现在回到内切圆坐标，它是实的坐标. 内切圆坐标最初起源于单复变数函数论（见文献[1]）. 在 40 年代，华罗庚引进超圆的概念. 作者把两者结合起来，称为**内切超圆坐标**，主要用来把对称空间的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 分解为两部分：

$$\Delta f=\mathfrak{L}_0 f+\sum_{j=m+1}^{N}\frac{\partial}{\partial u^j}(\mathfrak{L}_j f),$$

其中 $\mathfrak{L}_0$ 是 $u^1,\cdots,u^m$ 的常系数二阶椭圆型微分算子，$\mathfrak{L}_j$ 是线性一阶微分算子. $\sum_{j=m+1}^{N}\frac{\partial}{\partial u^j}(\mathfrak{L}_j f)$ 是 $u^{m+1},\cdots,u^N$ 的完全微分算子，当 $\mathfrak{L}_j f$ 在 R^N 的一个域 $\mathfrak{D}$ 的边界上为零时，应用 Stokes 公式知

$$\int_{\mathfrak{D}}\sum_{j=m+1}^{N}\frac{\partial\mathfrak{L}_j f}{\partial u^j}\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^N=0.$$

即此项在 Δf 的在 $\mathfrak{D}$ 的积分中是没有作用的. 我们可以设法从方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\mathfrak{L}_0\varphi$$

的热核中通过积分的变换把以上方程的热核变为方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\Delta f$$

的热核.

§5.1　内切超圆坐标

由于使用的名词定义不同,可能会引起混乱,所以在此先定义清楚我们所用的名词,然后再讨论.

这里所说的内切超圆(horo-hypercircle),第一个来源是单复变函数论中的极限圆(horocycle).

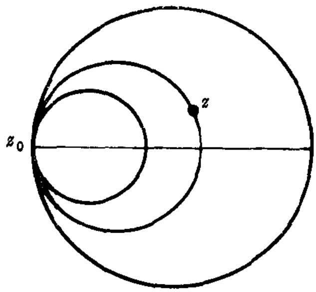

图 5.1

"Horo"一词本身无极限的含义,但是在单复变函数论中[1],这种"horocycle"是由单位圆盘 D_1 内一串圆盘的极限而得到,故有人翻译为极限圆.但从几何上看,这个极限圆实际上是单位圆的一个内切圆(见图 5.1),故我们称为内切圆.内切于 D_1 的一个固定点 z_0 的所有内切圆显然把 D_1 盖过,并只盖过一次.D_1 中任一点 z 有唯一的内切于 z_0 的并经过 z 点的内切圆.具体地说,D_1 内任一点可以用 $(\sigma,r)\in\mathrm{R}^2$ 的一点与它对应,即

$$z=\frac{1-e^{2\sigma}+2ire^{2\sigma}}{1+e^{2\sigma}-2ire^{2\sigma}}.$$

由此知

$$z+1=\frac{e^{-\sigma}}{\mathrm{ch}\sigma-ire^{\sigma}},\quad 1-|z|^2=\frac{1}{\mathrm{ch}^2\sigma+r^2e^{2\sigma}},$$

故有

$$\left|z+\frac{1}{1+e^{-2\sigma}}\right|^2=\left(\frac{e^{-2\sigma}}{1+e^{-2\sigma}}\right)^2 .$$

这表示 z 是在内切于 D_1 的边界点 -1 点的，以 $\frac{-1}{1+e^{-2\sigma}}$ 为中心、半径为 $\frac{e^{-2\sigma}}{1+e^{-2\sigma}}$ 的圆上. (σ,r) 就称为 z 点的内切圆坐标(horocycle coordinate).

至于超圆(hypercircle)，华罗庚最初给它的定义可以这样叙述：设 $\mathfrak{H}$ 是有 m 个特征根为正，n 个特征根为负的 $m+n$ 阶 Hermite 方阵，$\mathfrak{Z}$ 为 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(m,n)$ 的齐次坐标，$\mathfrak{F}(m,n)$ 中适合

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{H}\mathfrak{Z}^{\dagger}>0 \tag{5.1.1}$$

的开集，在讨论矩阵几何时称为超圆(hypercircle). 习知存在 $m+n$ 阶非异方阵 $\mathfrak{P}$，使得

$$\mathfrak{P}\mathfrak{H}\mathfrak{P}^{\dagger}=\begin{pmatrix}I^{(m)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix}.$$

因此可作变换

$$\mathfrak{Z}=\mathfrak{W}\mathfrak{P}^{-1},$$

使得此超圆化为标准形式

$$\mathfrak{W}\begin{pmatrix}I^{(m)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix}\mathfrak{W}^{\dagger}>0. \tag{5.1.2}$$

记

$$\mathfrak{W}=(\underset{m}{\mathfrak{W}_1},\underset{n}{\mathfrak{W}_2})m, \tag{5.1.3}$$

由(5.1.2)知，$\mathfrak{W}_1$ 必为非异的. $[\mathfrak{W}]$ 点的标准局部坐标为

$$W=\mathfrak{W}_1^{-1}\mathfrak{W}_2. \tag{5.1.4}$$

于是标准超圆的局部坐标表示为

$$I-WW^{\dagger}>0. \tag{5.1.5}$$

但后来华罗庚[24]称此超圆为超球(hyper-sphere). 原因可能是由于国际上专门名词的演化，例如以前叫单位圆的，现在叫单位圆盘. 我们今后把由(5.1.1)定义的点集称为超球(但英文用 hyper-ball，而不用 hyper-sphere，也是为了与国际惯用的一致)，而称超

圆为点集$[\mathfrak{Z}]$,其中$\mathfrak{Z}$适合

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{H}\mathfrak{Z}^{\dagger} = 0. \tag{5.1.6}$$

这是由(5.1.1)定义的超球的边界的子集.在标准超球时,即

$$WW^{\dagger} = I, \tag{5.1.7}$$

这是标准的超圆.由此可见,把标准超球看作是$C^{m\times n}$中的域,这就是典型域$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$,而标准超圆也就是$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的特征流形$\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(m,n)$. $W=0$称为标准超球的中心,简称球心.当$m=1$时,标准超球有时简称为球B^n.易知,通过球心的一个超平面与此球的交集仍然是一个(较低维)球,因此,我们把通过标准超球的中心的一个超平面与此超球的交集仍然称为超球,此超平面与标准超圆的交,仍称为超圆.

例如$m=n$时,超平面

$$W - W' = 0$$

与$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,m)$的交是超球,即典型域$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$;与标准超圆的交所得的超圆是$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$的特征流形$\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}(m)$.超平面

$$W + W' = 0$$

与$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,m)$相交而得到的超球是典型域$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$,与标准超圆的交是$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$的特征流形$\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(m)$.

上面所考虑的超球皆是偶维的.正如球的定义不一定是要偶维,可从实数域出发定义任意维的实球一样,超球可以从实数域来考虑,复超球是实超球的特殊情形.

令$\mathfrak{S}$是$m+n$阶对称实方阵,有m个特征根为正,n个特征根为负. $\mathfrak{X}$是实的Grassmann流形$\mathfrak{F}_{R}(m,n)$的齐次坐标,即是$m\times(m+n)$的秩为m的实矩阵.这些实矩阵的全体设为$E_{R}(m,n)$.如《典》著§1.1中所述一样,$\mathfrak{X}_1$与$\mathfrak{X}_2\in E_{R}(m,n)$称为等价(以$\mathfrak{X}_1\sim\mathfrak{X}_2$表示之),若有$m\times m$非异实方阵$P$,使

$$\mathfrak{X}_1 = P\mathfrak{X}_2.$$

按此等价关系把$E_{R}(m,n)$的矩阵分为等价类,$\mathfrak{X}$所属的等价类以$[\mathfrak{X}]$表示之.所有等价类所成的空间设为$\mathfrak{F}_{R}(m,n)$.令$\mathfrak{B}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ $(1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_m\leqslant m+n)$是如此的等价类的集合:以$\mathfrak{X}$为代表

的等价类$[\mathfrak{X}]\in\mathfrak{V}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，当且仅当$\mathfrak{X}$的第$\alpha_1$列，…，第$\alpha_m$列所成$m$阶方阵$\mathfrak{X}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$是非异的．令实排列方阵$P(\alpha)$使

$$\mathfrak{X}=(\mathfrak{X}_{\alpha_1\cdots\alpha_m},\mathfrak{X}_{\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{m+n}})P(\alpha),$$

其中的$\mathfrak{X}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$是非异方阵．在$\mathfrak{V}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$中引进$[\mathfrak{X}]$点的局部坐标

$$X=\mathfrak{X}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}^{-1}\mathfrak{X}_{\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{m+n}}. \tag{5.1.8}$$

如复的 Grassman 空间一样，可证：两个坐标邻域$\mathfrak{V}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$与$\mathfrak{V}(\beta_1,\cdots,\beta_m)$之间的坐标变换是有理变换，因此$\mathfrak{F}_R(m,n)$成一实解析流形．$\mathfrak{F}_R(m,n)$的开集

$$\mathfrak{X}\mathfrak{S}\mathfrak{X}'>0 \tag{5.1.9}$$

称为(实)超球．这可经过一个适当的齐次坐标的实非异线性变换

$$\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}\mathfrak{P}$$

(注意，此变换诱导出$\mathfrak{F}_R(m,n)$的一个有理变换)，使得超球化为标准超球$\mathfrak{R}_R(m,n)$

$$I-YY'>0, \tag{5.1.10}$$

其中Y是$m\times n$实方阵，是$\mathfrak{F}_R(m,n)$的坐标邻域$\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$中的局部坐标．我们同样称$\mathfrak{V}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$为$\mathfrak{F}_R(m,n)$的标准坐标邻域，在此邻域中由(5.1.8)引进的局部坐标即为标准局部坐标，$\mathfrak{R}_R(m,n)$称作实的典型域．

由(5.1.9)定义的超球的边界上的子集

$$\mathfrak{X}\mathfrak{S}\mathfrak{X}'=0 \tag{5.1.11}$$

称为实超圆，标准超球$\mathfrak{R}_R(m,n)$的边界上的超圆

$$YY'=I \tag{5.1.12}$$

称为标准超圆，也称为$\mathfrak{R}_R(m,n)$的特征流形，以$\mathfrak{C}_R(m,n)$表示之．$Y=0$称为超球$\mathfrak{R}_R$的中心．

过超球$\mathfrak{R}_R(m,n)$的中心的一实超平面与$\mathfrak{R}_R(m,n)$的交集仍称为超球，此超平面与标准超圆$\mathfrak{C}_R(m,n)$的交集仍称为超圆．

例如$m=n$时，超平面

$$X-X'=0$$

与 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 的交是一超球. 它也是对称空间，不过不是不可约的（参阅 § 6.4）.

复的标准超球是实的超球的特殊情形.

令 $$Z = X + iY,\ X \text{ 与 } Y \text{ 为实 } m \times n \text{ 矩阵},$$
则 $$I - ZZ^{\dagger} = I - XX' - YY' + i(XY' - YX').$$
由此可见

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I - ZZ^{\dagger} & 0 \\ 0 & I - \bar{Z}Z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix}^{\dagger}$$
$$= \begin{pmatrix} I - XX' - YY' & -XY' + YX' \\ XY' - YX' & I - XX' - YY' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}'. \tag{5.1.13}$$

这表示复的标准超球 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 是实的标准超球 $\mathfrak{R}_R(2m,2n)$

$$I^{(2m)} - \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}' > 0$$

与超平面

$$X_{11} - X_{22} = 0,\ X_{12} + X_{21} = 0 \tag{5.1.14}$$

相交所得的超球，此超平面亦可写为

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & I^{(m)} \\ -I^{(m)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.1.15}$$

所以在此从实的标准超球 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 开始. 不妨假定 $m \leqslant n$. 令

$$Y = \underset{m\quad\ n-m}{(Y_1\ ,Y_2)}m \tag{5.1.16}$$

为实 $m \times n$ 矩阵. $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 由适合

$$I - YY' = I - Y_1Y_1' - Y_2Y_2' > 0 \tag{5.1.17}$$

的矩阵 Y 的集合定义，又称为实的典型域. 实的标准超圆

$$YY' = I \tag{5.1.18}$$

称为 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 的特征流形，以 $\mathfrak{C}_R(m,n)$ 表示之.

作变换

$$Y_1 = (I + X_1)^{-1}(I - X_1),\ Y_2 = 2(I + X_1)^{-1}X_2, \tag{5.1.19}$$

把 $\mathfrak{R}_R(m,n)$一一地映为 $\mathrm{R}^{m\times n}$中的无界域：

$$\mathfrak{H}_R(m,n):\ \frac{1}{2}(X_1 + X_1') - X_2X_2' > 0, \tag{5.1.20}$$

因为

$$\begin{aligned} & I - Y_1Y_1' - Y_2Y_2' \\ & = 4(I + X_1)^{-1}\left(\frac{X_1 + X_1'}{2} - X_2X_2'\right)(I + X_1')^{-1}, \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

易证线性变换

$$\begin{aligned} X_1 &= A'(T_1 - 2T_2B' + BB' + K)A, \\ X_2 &= A'(T_2 - B), \end{aligned} \tag{5.1.22}$$

其中，A 为 $m\times m$ 非异实方阵，B 为 $m\times(n-m)$实方阵，K 为 $m\times m$ 实反称方阵.　　(5.1.23)

把 $\mathfrak{H}_R(m,n)$一一地映为其自身.此变换可写为

$$\begin{aligned} & (I,X_2,X_1) \\ & = A'(I,T_2,T_1)\begin{pmatrix} A'^{-1} & -B & (BB'+K)A \\ 0 & I^{(n-m)} & -2B'A \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

故所有适合条件(5.1.23)的变换(5.1.22)构成一个群，$\mathfrak{H}_R(m,n)$在此群下是可递的，即对 $\mathfrak{H}_R(m,n)$的任一点(X_{10},X_{20})可选取

$$B = X_{20},\ K = \frac{1}{2}(X_{10}' - X_{10}),$$

$$A'\left(\frac{X_{10} + X_{10}'}{2} - X_{20}X_{20}'\right)A = I, \tag{5.1.25}$$

使得变换(5.1.22)把(X_{10},X_{20})点映为$(I,0)$点.

在变换(5.1.22)中，特别取 A 为上三角方阵，其对角线上的元素为正，则所有这些变换成一子群 $\Gamma_{\mathfrak{R}}(m,n)$. 由于我们可以选

取 A 为如此的上三角方阵,使 A 适合(5.1.25)的条件,故 $\Gamma_{\mathfrak{R}}(m,n)$经实解析变换

$$X_1 = A'(I + BB' + K)A,\ X_2 = - A'B \quad (5.1.26)$$

一一地映为 $\mathfrak{H}_R(m,n)$. 实际上(5.1.26)即在(5.1.22)中取$(T_1, T_2)=(I,0)$. 由于 $\mathfrak{H}_R(m,n)$在 $\Gamma_{\mathfrak{R}}(m,n)$下可递,故变换(5.1.26)是把 $\mathfrak{H}_R(m,n)$盖过,我们只须证明此变换是一一的. 若有另一组矩阵 A_1、B_1、K_1 使得

$$A'(I + BB' + K)A = A_1'(I + B_1B_1' + K_1)A_1,$$
$$- A'B = - A_1'B_1,$$

比较第一式两端的对称方阵,知

$$\begin{aligned} A'(I + BB')A &= A_1'(I + B_1B_1')A_1 \\ &= A_1'A_1 + A'BB'A, \end{aligned}$$

因此有

$$A'A = A_1A_1' \text{ 或} (A_1^{-1}A)' = A^{-1}A_1.$$

上式第二式右端为上三角方阵,对角线上的元为正,左端为下三角方阵,对角线上的元为正,必须 $A^{-1}A_1=I$,即 $A_1=A$. 由此便知 $B_1=B$, $K_1=K$.

我们称变换(5.1.26)中的(A,B,K)为实典型域 $\mathfrak{R}_R(m,n)$的内切超圆坐标,其中 A 是上三角方阵,对角线上的元为正,B 是 $m\times(n-m)$矩阵,K 是 $m\times m$ 反称方阵,因为由(5.1.21)知

$$\begin{aligned} &(I + Y_1)^{-1}(I - Y_1Y_1' - Y_2Y_2')(I + Y_1')^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(X_1 + X_1') - X_2X_2' \\ &= A'A. \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

上式又可写为

$$\begin{aligned} &[Y_1 + A'(I + AA')^{-1}A](I + A'A) \\ &\quad \times [Y_1 + A'(I + AA')^{-1}A]' + Y_2Y_2' \\ &= (I + A'A)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

这是把变换(5.1.26)代入(5.1.19),得出变换

$$Y_1 = [I + A'(I + BB' + K)A]^{-1}[I - A'(I + BB' + K)A],$$

$$Y_2 = -2[I + A'(I + BB' + K)A]^{-1}A'B. \quad (5.1.29)$$

这是把 $\Gamma_R(m,n)$ 一一地映为 $\mathfrak{R}_R(m,n)$. 当 A 固定时,对应点 $Y=(Y_1,Y_2)$ 适合(5.1.28),这是一个超圆. 此超圆是超球

$$\begin{aligned}&[Y_1 + A'(I + AA')^{-1}A](I + A'A)\\&\times [Y_1 + A'(I + AA')^{-1}A]' + Y_2Y_2'\\&< (I + A'A)^{-1}\end{aligned} \quad (5.1.30)$$

的特征流形,此超球的中心为

$$(Y_1,Y_2) = (-A'(I + AA')^{-1}A, 0).$$

易见此中心是落在 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 之内. 此外, $Y_1=-I, Y_2=0$ 满足方程(5.1.28),因此(5.1.28)定义的超圆内切于 $\mathfrak{R}_R(m,n)$,故我们称 (A,B,K) 为 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 的内切超圆坐标.

特别是当 $m=2$ 时, $\mathfrak{R}_R(2,n)$ 可经实解析变换

$$\begin{aligned}X &= 2\begin{pmatrix}\overline{zz'} + 1 & i(zz' - 1)\\ zz' + 1 & -i(\overline{zz'} - 1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix}\\ &= \frac{-1}{1 - |zz'|^2}\begin{pmatrix}(\overline{zz'} - 1)z + (zz' - 1)\bar{z}\\ i(zz' + 1)\bar{z} - i(\overline{zz} + 1)z\end{pmatrix}\end{aligned} \quad (5.1.31)$$

与典型域

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_N(n) = \{z = (z^1,\cdots,z^n) \in \mathbb{C}^n \mid 1 + |zz'|^2\\ - 2zz^\dagger > 0, 1 - |zz'| > 0\}\end{aligned}$$

一一地对应(见《典》著中(2.1.68)式). 在这种意义下, $\mathfrak{R}_N(n)$ 也是一个超球. 此外,在《典》著 § 2.1(iv)的讨论中,隐含了 $\mathfrak{R}_N(n)$ 的自同构变换群(该书中(2.1.70)式)与 $\mathfrak{R}_R(2,n)$ 的等度变换

$$Y = (A + XB)^{-1}(C + DX)$$

所成的群同构. 此外,由《典》著中 § 3.3(iv)知, $\mathfrak{R}_N(n)$ 的不变度量是由 $\mathfrak{R}_R(2,n)$ 的不变度量诱导出来的,因此讨论 Laplace-Beltrami 算子有关的方程,如调和函数方程、热方程等在 $\mathfrak{R}_N(n)$ 上或 $\mathfrak{R}_R(2,n)$ 上讨论都是一样的.

由以上可见,实典型域 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 包含了典型域 $\mathfrak{R}_N(N)$,并且其他的典型域是此实的标准超球与适当的超平面的交. 所以首先

研究清楚实标准超球及其扩充空间——实的 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}_R(m,n)$是很重要的.

在第1章已经提到过,那里的方法在实的旗流形也能应用,而 $\mathfrak{F}_R(m,n)$是实1-旗流形,它在

$$\mathfrak{T} \in GL(m+n,\mathrm{R})$$

诱导的变换 $\tau_{\mathfrak{T}}$下不变,此即齐次坐标的变换

$$\mathfrak{Y} = Q\mathfrak{X}\mathfrak{T}, \tag{5.1.32}$$

其中 Q 为 $m\times m$ 实非异方阵,诱导出变换 $\tau_{\mathfrak{T}}:\mathfrak{F}(m,n)\to\mathfrak{F}(m,n)$ 与 Q 无关. 如果$[\mathfrak{X}]\in\mathfrak{V}(\alpha)$ $(\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_m\leqslant m+n)$是一标准坐标邻域,$[\mathfrak{Y}]\in\mathfrak{V}(\beta,\cdots,\beta_m)$,则有排列方阵 $P(\alpha)$ 与 $P(\beta)$使得

$$(I,Y) = Q(I,X)P(\alpha)\mathfrak{T}P(\beta)', \tag{5.1.33}$$

其中 $m\times n$ 矩阵 X 与 Y 的元素分别是$[\mathfrak{X}]$点与$[\mathfrak{Y}]$点的标准局部坐标. 注意,这里的排列方阵不再要求其行列式为1,它的元素每一行只有一个元素为1,其他元素为0的实非异方阵,其行列式可以是-1,此时

$$\mathfrak{T}_1 = P(\alpha)\mathfrak{T}P(\beta)' = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in GL(m+n,\mathrm{R}), \tag{5.1.34}$$

而变换(5.1.32)的局部坐标表示为

$$Y = (A+XB)^{-1}(C+XD). \tag{5.1.35}$$

也就是 $\tau_{\mathfrak{T}}$的局部坐标表示.

同样,$GL(m+n,R)$作用于 $\mathfrak{F}_R(m,n)$不是有效的(effective),即可能有不止一个 $GL(m+n,R)$的元素诱导出同一的变换 $\tau_{\mathfrak{T}}$. 然而是局部有效的,即 $GL(m+n,R)$幺元素的邻域中的方阵诱导出唯一的变换.

如第1章一样,可证明 $\mathfrak{F}_R(m,n)$在 $GL(m+n,R)$的正交子群 $O(m+n)$(所诱导)的变换下可递,如 $\mathfrak{T}\in O(m+n,R)$,则有 $\mathfrak{T}_1=P(\alpha)\mathfrak{T}P(\beta)'\in O(m+n,R)$. 此时(5.1.35)可写为

$$Y = (A+XB)^{-1}(C+XD)$$

$$= (-B' + A'X)(D' - C'X)^{-1}. \tag{5.1.36}$$

由此可见,若令

$$\begin{aligned} Y_j &= (A + X_jB)^{-1}(C + X_jD) \\ &= (-B' + A'X_j)(D' - C'X_j)^{-1} \\ &\quad (j = 1,2,\cdots p), \end{aligned} \tag{5.1.37}$$

当 X_k、Y_j 皆在同一坐标邻域时,

$$\begin{aligned} Y_j - Y_k &= (A + X_jB)^{-1}(X_j - X_k)(D' - C'X_k)^{-1}, \\ I + Y_jY_k' &= (A + X_jB)^{-1}(I + X_jX_k')(A + X_kB)'^{-1}, \\ I + Y_j'Y_k &= (D' - C'X_j)'^{-1}(I + X_j'X_k)(D' - C'X_k)'^{-1}, \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

则当

$$\det(I + Y_jY_k') \neq 0 \tag{5.1.39}$$

时,有

$$\begin{aligned} \Omega(Y_k,Y_j) &= (I + Y_jY_k')^{-1}(Y_j - Y_k)(I + Y_j'Y_k)^{-1}(Y_j - Y_k)' \\ &= (A + X_kB)'\Omega(X_k,X_j)(A + X_jB)'^{-1}, \end{aligned} \tag{5.1.40}$$

故

$$\begin{aligned} \Omega(Y_k,Y_j)\Omega(Y_j,Y_k) &= (A + X_kB)'\Omega(X_k,X_j) \\ &\quad \times \Omega(X_j,X_k)(A + X_kB)'^{-1}. \end{aligned} \tag{5.1.41}$$

令

$$\sigma_j(A)\ (j = 1,\cdots,m) \tag{5.1.42}$$

表示 $m\times m$ 方阵 A 的第 j 阶主子行列式之和. 由(5.1.40)知

$$\sigma_j[\Omega(Y_k,Y_j)\Omega(Y_j,Y_k)] \tag{5.1.43}$$

是 $\mathfrak{F}_R(m,n)$ 中的两点 Y_j 与 Y_k 的不变量. 更一般的,当 $I+Y_jY_k'$ $(j<k)$ 为非异时,

令

$$\Omega_p(Y_1,\cdots,Y_p) = \Omega(Y_1,Y_2)\Omega(Y_2,Y_3)\cdots\Omega(Y_p,Y_1), \tag{5.1.44}$$

则 $\sigma_j[\Omega_p(Y_1,\cdots,Y_p)]$ 是 $\mathfrak{F}_R(m,n)$ 中 p 点的不变量. 至于(5.1.39)为零的条件,即两点[$\mathfrak{X}$]与[$\mathfrak{Y}$]适合

$$\det(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}') = \det(\mathfrak{Y}\mathfrak{X}') = 0 \qquad (5.1.45)$$

时,称$[\mathfrak{X}]$与$[\mathfrak{Y}]$互为共轭点. 当 $\mathfrak{T}\in O(m+n,\mathrm{R})$时,经变换(5.1.34)后(5.1.44)不变. 当 $\mathfrak{Y}$ 固定时,使(5.1.45)成立的$[\mathfrak{X}]$点成为$\mathfrak{F}_k(m,n)$的复超曲面. 例如当 $\mathfrak{Y}=Q(I,0)$,是坐标邻域$\mathfrak{V}(1,\cdots,m)$中坐标为原点的点,记 $\mathfrak{X}=(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)$,方程(5.1.45)即

$$\det\mathfrak{X}\mathfrak{Y}' = \det\mathfrak{X}_1 = 0,$$

即所有与$[(I,0)]$共轭的点是"无穷远"点所成的超曲面,也即$\mathfrak{F}_R(m,n)$中不在 $\mathfrak{V}(1,\cdots,m)$的点.

此外,如 $m=n$,并且

$$Y_3 - Y_2 \text{ 与 } Y_1 - Y_4$$

为非异,令

$$\begin{aligned} R(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) &= (Y_1 - Y_2)(Y_3 - Y_2)^{-1}(Y_3 - Y_4)(Y_1 - Y_4)^{-1} \\ &= (A + X_1B)^{-1}R(X_1,X_2,X_3,X_4)(A + X_1B), \end{aligned} \qquad (5.1.46)$$

故

$$\sigma_j[R(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)] \ (j = 1,\cdots,m) \qquad (5.1.47)$$

也是$O(2m)$下的不变量,当 $m=1$ 时称为4点的交比,此时不但在$O(2,\mathrm{R})$下不变,而且在$GL(2,\mathrm{R})$下也不变.

现取 $X_1=X, X_2=X+\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}X$ 看作是无穷小的矩阵(即其元素是无穷小),经变换(5.1.36)对应为 $Y_1=Y$ 及 $Y_2=Y+\mathrm{d}Y$. 在(5.1.40)略去高阶无穷小项后,有

$$\begin{aligned} &\Omega(Y,Y + \mathrm{d}Y) \\ &= (A + XB)^{-1}\Omega(X,X + \mathrm{d}X)(A + XB)^{-1}. \end{aligned} \qquad (5.1.48)$$

为方便起见,令

$$\begin{aligned} \omega(Y,\mathrm{d}Y) &= \Omega(Y,Y + \mathrm{d}Y)(\text{略去高阶项}) \\ &= (I + YY')^{-1}\mathrm{d}Y(I + Y'Y)^{-1}\mathrm{d}Y'. \end{aligned} \qquad (5.1.49)$$

由(5.1.48)知

$$\sigma_j[\omega(Y,\mathrm{d}Y)] \qquad (5.1.50)$$

是$O(m+n)$下的不变微分式. 当 $j=1$ 时,令

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sigma_1[\omega(Y,dY)] \\ &= \mathrm{tr}[(I+YY')^{-1}dY(I+Y'Y)^{-1}dY'] \end{aligned} \tag{5.1.51}$$

是不变的二次微分式，这是 $\mathfrak{F}_R(m,n)$ 上的不变黎曼度量. 当 $m>1$ 时，还有 $\sigma_2(\omega),\cdots,\sigma_m(\omega)$ 等 $m-1$ 个分别是 $4,6,\cdots,2m$ 次 $O(m+n)$ 下不变的微分式，因此可以引进 m 个 Finsler 度量（见文献[63]）：

$$F_j(Y,dY)=\{\sigma_j[\omega(Y,dY)]\}^{\frac{1}{2j}}, \quad J=1,\cdots,m. \tag{5.1.52}$$

至于 $j>1$ 时对 Finsler 几何的研究，因篇幅关系，在此暂不作讨论. 现在只考虑 $j=1$ 的情况.

把坐标 Y 排成一个行向量：

$$y=(y_{11},y_{12},\cdots,y_{1n},y_{21},y_{22},\cdots,y_{2n},\cdots,y_{m1},y_{m2},\cdots,y_{mn}), \tag{5.1.53}$$

则可把(5.1.51)写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= dy[(I+YY')^{-1}\cdot\times(I+Y'Y)^{-1}]dy' \\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{(i\alpha)(j\beta)}dy_{i\alpha}dy_{j\beta} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} H_{ij}(Y)K_{\alpha\beta}(Y)dy_{i\alpha}dy_{j\beta}, \end{aligned} \tag{5.1.54}$$

其中

$$\begin{aligned} H(Y) &= (H_{ij}) = (I+YY')^{-1}, \\ K(Y) &= (K_{\alpha\beta}) = (I+Y'Y)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.1.55}$$

(5.1.54)是 $O(m+n)$ 下的不变度量，它的 Christofel 符号

$$\left\{\begin{matrix}(k\gamma)\\(i\alpha)(j\beta)\end{matrix}\right\} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{n} g^{(k\gamma)(l\lambda)}\left(\frac{\partial g_{(i\alpha)(l\lambda)}}{\partial y_{j\beta}}+\frac{\partial g_{(j\beta)(l\lambda)}}{\partial y_{i\alpha}}-\frac{\partial g_{(i\alpha)(j\beta)}}{\partial y_{l\lambda}}\right)$$

在(5.1.36)的变换下有

$$\left\{\begin{matrix}(k\gamma)\\(i\alpha)(j\beta)\end{matrix}\right\}(X)$$

$$= \left\{\begin{matrix} (r\nu) \\ (p\lambda)(q\mu) \end{matrix}\right\}(Y) \frac{\partial x_{\cdot\gamma}}{\partial y_{r\nu}} \cdot \frac{\partial y_{p\lambda}}{\partial x_{i\alpha}} \cdot \frac{\partial y_{q\mu}}{\partial x_{j\beta}} + \frac{\partial^2 y_{p\lambda}}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}} \cdot \frac{\partial x_{k\gamma}}{\partial y_{p\lambda}}. \tag{5.1.56}$$

在上式中，为方便起见，用和号的省略，指标 $i,j,k,\cdots$ 由 1 到 m，指标 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 由 1 到 n.

由(5.1.54)可知

$$\left\{\begin{matrix} (r\nu) \\ (p\lambda)(q\mu) \end{matrix}\right\}(0) = 0.$$

我们选取变换(5.1.36)使得把 $\mathfrak{V}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 中以 X_0 为坐标的点映为 $\mathfrak{V}(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 中以 $Y=0$ 为坐标的点，则(5.1.56)变为

$$\left\{\begin{matrix} (k\gamma) \\ (j\alpha)(j\beta) \end{matrix}\right\}(X_0) = \left[\frac{\partial^2 y_{p\lambda}}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}} \frac{\partial x_{k\gamma}}{\partial y_{p\lambda}}\right]_{X=X_0}, \tag{5.1.57}$$

以 $\mathrm{d}x_{j\beta}$ 乘上式两端并对指标 j 与 β 求和，得出

$$\mathrm{d}x_{j\beta}\left\{\begin{matrix} (k\gamma) \\ (i\alpha)(j\beta) \end{matrix}\right\}(X_0) = \left[\mathrm{d}\,\frac{\partial y_{p\lambda}}{\partial x_{j\alpha}} \frac{\partial x_{k\gamma}}{\partial y_{p\lambda}}\right]_{X=X_0}.$$

把上式左端看作是 $mn\times mn$ 方阵 Γ 中第$(i\alpha)$行第$(k\gamma)$列的元素便得出

$$\Gamma(X_0) = \left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right) \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^{-1}\right]_{X=X_0}. \tag{5.1.58}$$

这表示要计算 $\Gamma(X_0)$ 只须计算变换(5.1.36)的函数方阵及其微分便可以了.

实际上，在(5.1.36)中取

$$D = (I + X_0'X_0)^{-\frac{1}{2}},\ C = -X_0D,$$
$$A = (I + X_0X_0')^{-\frac{1}{2}},\ B = X_0'A, \tag{5.1.59}$$

便把 X_0 点变为 0 点. 微分(5.1.36)，得

$$\mathrm{d}Y = (A + XB)^{-1}\mathrm{d}XD - (A + XB)^{-1}\mathrm{d}XB(A + XB)^{-1}(C + XD)$$

$$
\begin{aligned}
&= (A + XB)^{-1}\mathrm{d}XD \\
&\quad - (A + XB)^{-1}\mathrm{d}XB(-B' + A'X)(D' - C'X)^{-1} \\
&= (A + XB)^{-1}\mathrm{d}X(D' - C'X)^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.1.60}
$$

由此知函数矩阵

$$
\frac{\partial Y}{\partial X} = (A + XB)'^{-1} \cdot\times (D' - C'X)^{-1} \tag{5.1.61}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right) &= [-(A + XB)^{-1}\mathrm{d}XB(A + XB)^{-1}]' \\
&\quad \cdot\times (D' - C'X)^{-1} + (A + XB)'^{-1} \\
&\quad \cdot\times [(D' - C'X)^{-1}C'\mathrm{d}X(D' - C'X)^{-1}]
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right) \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^{-1} &= [-\mathrm{d}XB(A + XB)^{-1}]' \cdot\times I \\
&\quad + I \cdot\times (D' - C'X)^{-1}C'\mathrm{d}X,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right) \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^{-1}\right]_{X=X_0} &= [-\mathrm{d}XX_0'(I + X_0X_0')^{-1}]' \cdot\times I \\
&\quad - I \cdot\times (I + X_0'X_0)^{-1}X_0'\mathrm{d}X.
\end{aligned} \tag{5.1.62}
$$

由(5.1.58)知(由于 X_0 是任一点,可把它换为 X)

$$
\left\{\begin{matrix} (k\gamma) \\ (i\alpha)(j\beta) \end{matrix}\right\}(X)\mathrm{d}x_{j\beta} = -\mathrm{d}x_{i\lambda}x_{l\lambda}H_{lk}\delta_{\alpha\gamma} - \delta_{ik}K_{\alpha\lambda}x_{l\lambda}\mathrm{d}x_{l\gamma}. \tag{5.1.63}
$$

比较两端 $\mathrm{d}x_{j\beta}$的系数,便得 Christoffel 符号

$$
\left\{\begin{matrix} (k\gamma) \\ (i\alpha)(j\beta) \end{matrix}\right\} = -\delta_{ij}x_{l\beta}H_{lk}\delta_{\alpha\gamma} - \delta_{ik}K_{\alpha\lambda}x_{j\lambda}\delta_{\gamma\beta}. \tag{5.1.64}
$$

由此知测地线方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2x_{k\gamma}}{\mathrm{d}s^2} + \left\{\begin{matrix} (k\gamma) \\ (i\alpha)(j\beta) \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}x_{i\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_{j\beta}}{\mathrm{d}s} \\
&\quad = \frac{\mathrm{d}^2x_{k\gamma}}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}x_{i\lambda}}{\mathrm{d}s}x_{l\lambda}H_{lk}\frac{\mathrm{d}x_{i\gamma}}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}x_{k\alpha}}{\mathrm{d}s}K_{\alpha\lambda}x_{l\lambda}\frac{\mathrm{d}x_{l\gamma}}{\mathrm{d}s} \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

写作矩阵形式即为

$$\frac{d^2X}{ds^2}-(I+XX')^{-1}X\frac{dX'}{ds}\frac{dX}{ds}$$

$$-\frac{dX}{ds}(I+X'X)^{-1}X'\frac{dX}{ds}=0. \qquad (5.1.65)$$

这是黄用诹[69]、[70]最先写出来的形式.

过 $\mathfrak{B}(\alpha)$ 中任两点的测地线可以把它作一次(5.1.36)的变换，使之分别变为 0 点与 Λ 点：

$$\Lambda=(\lambda_{j\alpha})_{1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant\alpha\leqslant n},\ \lambda_{j\alpha}=\begin{cases}\lambda_j\geqslant 0, 当\ j=\alpha;\\ 0, 当\ j\neq\alpha.\end{cases} \qquad (5.1.66)$$

令

$$X=(x_{j\alpha}(s)),\ x_{j\alpha}(s)=\begin{cases}f_j(s),\ 当\ \alpha=j;\\ 0,\ 当\ \alpha\neq j.\end{cases}$$

方程(5.1.65)化为

$$\frac{d^2f_j}{ds^2}-\frac{2f_j}{1+|f_j|^2}\left(\frac{df_j}{ds}\right)^2=0,\ j=1,\cdots,m,$$

得出解

$$f_j(s)=\tan\frac{s}{s_0}\Gamma_j,\ \Gamma_j=\arctan\lambda_j, 0\leqslant s\leqslant s_0, \qquad (5.1.67)$$

其中 s_0 是 0 至 Λ 的测地线弧长：

$$s_0=r(0,\Lambda)=\int_0^{s_0}ds$$

$$=\int_0^{s_0}\{[\mathrm{tr}(I+\Lambda\Lambda')^{-1}d\Lambda(I+\Lambda'\Lambda)^{-1}d\Lambda]\}^{1/2}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{m}(\arctan\lambda_k)^2\right]^{1/2};$$

而过此两点的测地线为

$$X=\tan\frac{s}{s_0}A,\ A=\arctan\Lambda,\ 0\leqslant s\leqslant s_0.$$

当然，我们可以由此求测地线的共轭点及其指数. 利用 Morse 理论最后得出 Bott 的正交群的同伦群周期性定理(见文献[57]). 叶

芳草及后来刘伟明[55]就是用此法分别得出了复 Grassman 流形与 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$、$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(m)$、$\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)$的扩充空间的共轭点及其指数，以及与之相应的群的同伦群的周期性定理.

此外另一个用 Grassmann 流形的矩阵表示的好处就是可以具体构造 Morse 函数

$$M(\mathfrak{X}) = \mathrm{tr}(\mathfrak{X}\Lambda\mathfrak{X}'),$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix},\ \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \nu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_n \end{pmatrix}$$

及限定齐次坐标适合

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}' = I. \tag{5.1.68}$$

换言之，$\mathfrak{X}_1$ 与 $\mathfrak{X}_2$ 等价的充要条件为

$$\mathfrak{X}_1 = \Gamma\mathfrak{X}_2,\ \Gamma \in O(m). \tag{5.1.69}$$

它的几何意义是：把纤维丛 $\pi: E_{\mathrm{R}}(m,n) \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(m,n)$的结构群 $GL(m,\mathrm{R})$约化为 $O(m)$而得纤维丛

$$\pi_1: E_1(m,n) \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathrm{R}}(m,n),$$

其中 $E_1(m,n)$是适合(5.1.68)的矩阵空间. 此时 $M(\mathfrak{X})$与 $\mathfrak{X}$ 的等价类的代表选取无关，故是 $\mathfrak{F}_{\mathrm{R}}$ 上的函数，由于

$$\mathfrak{X} = Q(I,X)P(\alpha),$$

其中 X 是局部坐标. 由(5.1.68)得

$$Q'Q = (I + XX')^{-1},$$

故

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{X}) &= \mathrm{tr}[(I,X)\Lambda(I,X)'(I + XX')^{-1}] \\ &= \mathrm{tr}[(\Lambda_1 + X\Lambda_2X')(I + XX')^{-1}] \\ &= \mathrm{tr}[\Lambda_1 + X\Lambda_2X' - \Lambda_1XX' + \cdots] \\ &= \sum_{j=1}^{m}\lambda_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}(\nu_\alpha - \lambda_j)x_{j\alpha}^2 + \text{高次项}. \end{aligned}$$

由此不难计算 Hessian 值：

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}}.$$

再应用 Morse 理论得出 $\mathfrak{F}_R(m,n)$的 Betti 数，结果是已知的(例如见文献[10])，这里仅提供一个较简捷的方法，此法还可应用于其他闭的对称空间(见文献[77]).

§5.2 $\mathfrak{R}_R(m,n)$的不变的方程组

对一实的 N 维微分流形 $\mathfrak{M}$ 可以定义无穷多的黎曼度量(参阅文献[42]中定理 6.3.1)，设其中的一个为

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{5.2.1}$$

对于已给出的黎曼度量，自然地有黎曼联络，它对自然的标架即 Christoffel 符号

$$\begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^{N} g^{jp}\left(\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lp}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^p}\right). \tag{5.2.2}$$

给与联络，就可定义协变微分

$$\frac{\delta}{\delta x^\alpha}. \tag{5.2.3}$$

由此可定义对应于黎曼度量(5.2.1)的 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta f = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} g^{\alpha\beta}\frac{\delta^2 f}{\delta x^\alpha \delta x^\beta}. \tag{5.2.4}$$

它作用于函数(或标量)f. 这是调和算子

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

作用于标量 f 的情况. 此时可记为

$$\Delta f = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right),\quad g = \det(g_{\alpha\beta}). \tag{5.2.5}$$

显然，Δ 与所选取的黎曼度量有关. 故调和函数、Green 函数、热核等等的定义都与所选取的黎曼度量有关. 在 $\mathfrak{M}$ 是闭(即以前称为

紧)流形的情形,Hodge 定理之所以著名,就是因为他证明线性独立的 p 次调和式的个数与所选取的黎曼度量无关(见文献[14]、[71]、[72]);陈省身的示性类也是一样.至于黎曼流形非闭(或称非紧)的情形,问题就复杂了.例如第 2 章所说的旗域,可以说是半开半闭.因此,如何选取一非紧流形的黎曼度量为好?例如在典型域的调和函数论中,如果不是选取我们所用的度量(例如选取最简单的欧氏度量)Poisson 核就不存在,边值问题的解就复杂得多.所以选取一非紧微分流形的黎曼度量,最好是自然的或内蕴的(intrinsic),例如齐性流形,自然,最好选取不变度量.但正如旗域所说明的,这些不变度量也可能有无穷多,其中最自然地是选取华罗庚度量.不过,正如第 2 章中所述旗域的情形中,华罗庚度量不见得是 Kähler 度量.在复流形的情形,最好能选取 Kähler-Einstein 度量.因为条件越多,选择的范围就越小.这个问题与 Calabi 猜想有关,或者与复 Mongè-Amperè 解的存在性有关,丘成桐[78]解决了闭 Kähler 流形第一陈类$\leqslant 0$ 的 Calabi 猜想是一大贡献.在 C^N 中的有界域 $\mathfrak{D}$ 的 Bergman 度量是一内蕴的度量,它又是一 Kähler 度量.在可递域情形,它必定是 Kähler-Einstein度量.在非可递域的情形,就不知道了.郑绍远-丘成桐证明了①:若 $\mathfrak{D}$ 是强拟凸域,则 Einstein 度量存在.

我们考虑不可约的对称空间,故选择度量的烦恼就不存在了.因为不可约对称空间的不变度量在差一个常数因子的意义下是唯一确定的.对不可约对称空间的拓扑积,要求不变度量是华罗庚度量,也就是唯一确定,而且在 Hermite 对称空间的情形这是 Kähler-Einstein 度量.

实典型域 $\mathfrak{R}_R(m,n)$(或实的标准超球)

$$I - XX' > 0$$

---

① 郑绍远(Cheng S Y),丘成桐(Yau S T). On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifold and the regularity of Fefferman's equation. Comm. Pure and Appl. Math. 1980, 33: 507～544.

在下面的变换中不变:

$$X=(A+SB)^{-1}(C+SD)$$
$$=(B'+A'S)(D'+C'S)^{-1},\qquad (5.2.6)$$

其中 A、B、C、D 分别为 $m\times m$、$n\times m$、$m\times n$、$n\times n$ 实矩阵,适合

$$AA'-CC'=I,\ AB'-CD'=0,$$
$$D'D-BB'=I.\qquad (5.2.7)$$

这等价于条件

$$A'A-B'B=I,\ A'C-B'D=0,$$
$$D'D-C'C=I.\qquad (5.2.8)$$

实际上,可更一般的,令 $T\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$,

$$Y=(A+TB)^{-1}(C+TD)$$
$$=(B'+A'T)(D'+C'T)^{-1},\qquad (5.2.9)$$

则有

$$I-XY'=(A+SB)^{-1}(I-ST')(A'+B'T')^{-1}.\qquad (5.2.10)$$

特别是当 $S=T$ 时,

$$I-XX'=(A+SB)^{-1}(I-SS')(A'+B'S')^{-1}.\qquad (5.2.11)$$

此即变换(5.2.6)把 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}$ 一一地映为自身.同理可证

$$I-Y'X=(D+T'C)^{-1}(I-T'S)(D'+C'S)^{-1}\qquad (5.2.12)$$

及

$$X-Y=(A+SB)^{-1}(S-T)(D'+C'T)^{-1}.\qquad (5.2.13)$$

由于当 $X\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}$, $Y\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}$ 时, $I-XY'$ 非异(见引理 4.2.1),故

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y)&=(I-XY')^{-1}(X-Y)(I-Y'X)^{-1}(X-Y)'\\&=(A'+B'T)(I-ST')^{-1}(S-T)(I-T'S)^{-1}\\&\quad\times(S-T)'(A'+B'S')^{-1}\\&=(A'+B'T')\Omega(S,T)(A'+B'S')^{-1}.\end{aligned}\qquad (5.2.14)$$

因此

$$\Omega(X,Y)\Omega(Y,X)$$

$$= (A' + B'T')\Omega(S,T)\Omega(T,S)(A' + B'T')^{-1}. \quad (5.2.15)$$

令 $\sigma_j(A)$表示 $m\times m$ 方阵 A 的 j 阶主子行列式的和($j=1,\cdots,m$)，由(5.2.15)知

$$\sigma_j[\Omega(X,Y)\Omega(Y,X)] \quad (j = 1,\cdots,m) \qquad (5.2.16)$$

是 X,Y 在变换(5.2.6)下的不变量.

令 $X=Y+\mathrm{d}Y$，即 X 与 Y 点无穷接近，以之代入(5.2.14)，略去高于二阶的无穷小，得

$$\begin{aligned}\Omega(Y,Y + \mathrm{d}Y) &= (I - YY')^{-1}\mathrm{d}Y(I - Y'Y)^{-1}\mathrm{d}Y' \\ &= (A' + B'T')[(I - TT')^{-1}\mathrm{d}T(I - T'T)^{-1}\mathrm{d}T] \\ &\quad \times (A' + B'T')^{-1} \\ &= (A' + B'T')\Omega(T,T + \mathrm{d}T)(A' + B'T')^{-1}.\end{aligned} \qquad (5.2.17)$$

由此知

$$\sigma_j[(I-YY')^{-1}\mathrm{d}Y(I-Y'Y)^{-1}\mathrm{d}Y'] \quad (j=1,\cdots,m) \qquad (5.2.18)$$

是变换(5.2.6)下的不变量. 特别是当 $j=1$ 时，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{tr}[(I - YY')^{-1}\mathrm{d}Y(I - Y'Y)^{-1}\mathrm{d}Y'] \quad (5.2.19)$$

是(5.2.6)变换下不变的黎曼度量. 因此相应于此度量的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 以 R^{mn}的坐标 $X=(x_{j\alpha})_{1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant\alpha\leqslant n}$表示为(参阅《典》著中 § 6.4)

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{jk} - \sum_{\sigma=1}^{m}x_{j\sigma}x_{k\sigma}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m}x_{l\alpha}x_{l\beta}\right) \\ &\quad \times \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j\alpha}\partial x_{k\beta}} - 2\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}x_{k\alpha}\left(\delta_{jk} - \sum_{\lambda=1}^{n}x_{j\lambda}x_{k\lambda}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{j\alpha}} \\ &= \det(I - XX')^{\frac{m+n}{2}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}}\Bigg[\det(I - XX')^{-\frac{m+n}{2}} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}\left(\delta_{jk} - \sum_{\lambda=1}^{n}x_{j\lambda}x_{k\lambda}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m}x_{l\alpha}x_{l\beta}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{k\beta}}\Bigg].\end{aligned} \qquad (5.2.20)$$

在《典》著的 § 6.4 中，$\mathfrak{R}_R$ 有 Poisson 核(注意，下面的 Poisson 核

比该书§6.4中的多了一个因子$[V(\mathfrak{C}_R)]^{-1}$，以使与前一章保持一致）

$$
\begin{aligned}
P(X,\Gamma)&=\frac{\det(I-XX')^{\frac{n-1}{2}}}{V(\mathfrak{C}_R)\det(I-X\Gamma')^{n-1}}\\
&=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_R)}\left\{1-\frac{n-1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}x_{j\beta}^2+\cdots\right\}\\
&\quad\times\left\{1+(n-1)\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}x_{j\beta}\gamma_{j\beta}\right.\\
&\quad-\frac{n-1}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\beta,\lambda=1}^{n}(x_{j\beta}\gamma_{j\beta}x_{k\lambda}\gamma_{k\lambda}-x_{j\beta}\gamma_{k\beta}x_{k\lambda}\gamma_{j\lambda})\\
&\quad\left.+\frac{n(n-1)}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\beta,\lambda=1}^{n}x_{j\beta}\gamma_{j\beta}x_{k\lambda}\gamma_{k\lambda}+\cdots\right\},
\end{aligned}\tag{5.2.21}
$$

这里$X=(x_{j\alpha})$，$\Gamma=(\gamma_{j\alpha})$，$\Gamma\Gamma'=I$. 已证（见文献[25]）

$$\Delta_X P(X,\Gamma)=0.$$

现在考虑

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{l=1}^{m}x_{l\alpha}x_{l\beta}\right)\frac{\partial^2P(X,\Gamma)}{\partial x_{p\alpha}\partial x_{q\beta}}\right]_{X=0}\\
&=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_R)}\left\{-n(n-1)\delta_{pq}-\frac{n-1}{2}\right.\\
&\quad\times\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta,\lambda=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}}[\delta_{qj}\delta_{\beta\alpha}\gamma_{j\beta}x_{k\lambda}\gamma_{k\lambda}+x_{j\beta}\gamma_{j\beta}\delta_{kq}\delta_{\alpha\lambda}\gamma_{k\lambda}\\
&\quad-\delta_{jq}\delta_{\beta\alpha}\gamma_{k\beta}x_{k\lambda}\gamma_{j\lambda}-x_{j\beta}\gamma_{k\beta}\delta_{kq}\delta_{\lambda\alpha}\gamma_{j\lambda}]+\frac{n(n-1)}{2}\\
&\quad\left.\times\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta,\lambda=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{p\alpha}}(\delta_{jq}\delta_{\beta\alpha}\gamma_{j\beta}x_{k\lambda}\gamma_{k\lambda}+x_{j\beta}\gamma_{j\beta}\delta_{kq}\delta_{\lambda\alpha}\gamma_{k\lambda})\right\}_{X=0}\\
&=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_R)}\left\{-n(n-1)\delta_{pq}\right.\\
&\quad-\frac{n-1}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha,\lambda=1}^{n}\gamma_{q\alpha}\delta_{kp}\delta_{\lambda\alpha}\gamma_{k\lambda}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha,\lambda=1}^{n}\delta_{jp}\delta_{\beta\alpha}\gamma_{j\beta}\gamma_{q\alpha}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha,\lambda=1}^{n}\gamma_{k\alpha}\delta_{kp}\delta_{\lambda\alpha}\gamma_{q\lambda} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\delta_{jp}\delta_{\beta\alpha}\gamma_{q\beta}\gamma_{j\alpha}\Bigg]\\
&+ \frac{n(n-1)}{2}\Bigg[\sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha,\lambda=1}^{n}\gamma_{q\alpha}\delta_{kp}\delta_{\lambda\alpha}\gamma_{k\lambda} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\delta_{jp}\delta_{\beta\alpha}\gamma_{j\beta}\gamma_{q\alpha}\Bigg]\Bigg\}\\
&= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{R}})}\Bigg\{-n(n-1)\delta_{pq} - \frac{n-1}{2}\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_{q\alpha}\gamma_{p\alpha}\\
&+ \sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_{p\alpha}\gamma_{q\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_{p\alpha}\gamma_{q\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_{q\alpha}\gamma_{p\alpha}\Bigg]\\
&+ \frac{n(n-1)}{2}\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_{q\alpha}\gamma_{p\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_{p\alpha}\gamma_{q\alpha}\Bigg]\Bigg\}\\
&= \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{R}})}\Bigg\{-n(n-1)\delta_{pq} + \frac{n(n-1)}{2}(\delta_{qp}+\delta_{pq})\Bigg\}\\
&= 0. \qquad (5.2.22)
\end{aligned}
$$

另一方面，由(5.2.6)知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X &= (A+SB)^{-1}\mathrm{d}SD\\
&\quad - (A+SB)^{-1}\mathrm{d}SB(A+SB)^{-1}(C+SD)\\
&= (A+SB)^{-1}\mathrm{d}SD\\
&\quad - (A+SB)^{-1}\mathrm{d}SB(B'+A'S)(D'+C'S)^{-1}\\
&= (A+SB)^{-1}\mathrm{d}S(D'+C'S)^{-1}. \qquad (5.2.23)
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
X &= (x_{j\alpha})_{1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant\alpha\leqslant n},\\
S &= (s_{j\alpha}),\\
Q &= (Q_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant m} = (A+SB)^{-1},\\
Q^{-1} &= (q_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant m} = A+SB,\\
R &= (R_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n} = (D'+C'S)^{-1},\\
R^{-1} &= (r_{\alpha\beta}) = D'+C'S.
\end{aligned}
$$

由(5.2.23)知

$$\mathrm{d}S = (A+SB)\mathrm{d}X(D'+C'S).$$

此即

$$\frac{\partial s_{j\alpha}}{\partial x_{k\beta}} = q_{jk} r_{\beta\alpha}. \tag{5.2.24}$$

如证(5.2.11)一样,可证

$$I - X'X = (D + S'C)^{-1}(I - S'S)(D' + C'S)^{-1}.$$

此即

$$\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m} x_{l\alpha} x_{l\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{l=1}^{m} s_{l\lambda} s_{l\mu}\right) R_{\lambda\alpha} R_{\mu\beta}. \tag{5.2.25}$$

经变换(5.2.6),由(5.2.24)知

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 f}{\delta x_{j\alpha} \delta x_{k\beta}} &= \sum_{l,p=1}^{m} \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \frac{\partial s_{p\lambda}}{\partial x_{j\alpha}} \frac{\partial s_{l\mu}}{\partial x_{k\beta}} \frac{\delta^2 f}{\delta s_{p\lambda} \delta s_{l\mu}} \\ &= q_{pj} r_{\alpha\lambda} q_{lk} r_{\beta\mu} \frac{\delta^2 f}{\delta s_{p\lambda} \delta s_{l\mu}}. \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

由(5.2.25)知

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m} x_{l\alpha} x_{l\beta}\right) \frac{\delta^2 f}{\delta x_{j\alpha} \delta x_{k\beta}} \\ &= \sum_{p,l=1}^{m} q_{pj} q_{lk} \left[\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{i=1}^{m} s_{i\lambda} s_{i\mu}\right) \frac{\delta^2 f}{\delta s_{p\lambda} \delta s_{l\mu}}\right]. \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

现以 Poisson 核 $f = P(X, \Gamma)$ 代入,并取 $X = 0$,变换(5.2.6)是 $\mathfrak{R}_R$ 的自同构,它必将 $\mathfrak{R}_R$ 的某一点(设其为 S_0 点)映为原点 $X = 0$,应用(5.2.22)于(5.2.27),得

$$\begin{aligned} &\sum_{p,l=1}^{m} q_{pj}(S_0) q_{lk}(S_0) \left[\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{k=1}^{m} s_{k\lambda} s_{k\mu}\right) \frac{\delta^2 P(X, \Gamma)}{\delta s_{p\lambda} \delta s_{l\mu}}\right]_{S=S_0} \\ &= \left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m} x_{l\alpha} x_{l\beta}) \frac{\delta^2 P(X, U)}{\delta x_{j\alpha} \delta x_{k\beta}}\right]_{X=0} = 0. \end{aligned}$$

由于 $(q_{pj}(S_0))$ 是非异方阵,由上式知

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{k=1}^{m} s_{k\lambda} s_{k\mu}\right) \frac{\delta^2 P(X, \Gamma)}{\delta s_{p\lambda} \delta s_{l\mu}} = 0,$$

当 $S = S_0$,但 S_0 可以是 $\mathfrak{R}_R$ 中的任一点,所以上式对任意的 $S \in \mathfrak{R}_R$ 成立. 在(5.2.10)中取 $Y = \Gamma \in \mathfrak{C}_R$,对应的点 $T = \Gamma_1 \in \mathfrak{C}_R$. 取行列

式,有

$$\det(I - X\Gamma') \\ = \det(I - S\Gamma_1)\det(A + SB)^{-1}\det(A' + B'\Gamma_1')^{-1}.$$

因此 Poisson 核 $P(X,\Gamma)$经变换(5.2.6),有下面的关系:

$$P(X,\Gamma) = P(S,\Gamma_1)\det(A + \Gamma_1 B)^{n-1}. \qquad (5.2.28)$$

由此知方程即

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}\left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{k=1}^{m} s_{k\lambda}s_{k\mu}\right)\frac{\delta^2 P(S,\Gamma_1)}{\delta s_{p\lambda}\delta s_{l\mu}} = 0, \qquad (5.2.29)$$

其中 $\Gamma_1 \in \mathfrak{C}_{\mathrm{R}}$.

由于已经证明了任一在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}$ 内调和,即

$$\Delta f = 0,$$

并且在 $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{R}}$ 连续(实际上在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}+\mathfrak{C}_{\mathrm{R}}$ 连续已经足够了,因在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}+\mathfrak{C}_{\mathrm{R}}$ 连续的调和函数必在 $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{R}}$ 连续)的函数 f,由《典》著中 § 6.4 知,有积分表示

$$f(X) = \int_{\Gamma\in\mathfrak{C}_{\mathrm{R}}} f(\Gamma)P(X,\Gamma)\dot{\Gamma}. \qquad (5.2.30)$$

根据(5.2.29)

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}\left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{l=1}^{m} x_{l\lambda}x_{l\mu}\right)\frac{\delta^2 f(X)}{\delta x_{j\lambda}\delta x_{k\mu}} \\ = \int_{\Gamma\in\mathfrak{C}_{\mathrm{R}}} f(\Gamma)\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}\left(\delta_{\lambda\mu} - \sum_{l=1}^{n} x_{l\lambda}x_{l\mu}\right)\frac{\delta^2 P(X,\Gamma)}{\delta x_{j\lambda}\delta x_{k\mu}}\dot{\Gamma} \\ = 0. \qquad (5.2.31)$$

这就是华罗庚[23]曾经指出的在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$时 f 适合一个方程,则必适合一组 m^2 方程,这里证明在实的典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$ 亦成立,注意,m 是对称空间 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$ 的秩. 另外,如果将上式乘以 $\delta_{lj} - \sum_{\gamma=1}^{n} x_{l\gamma}x_{j\gamma}$,并对指标 j 求和,知 f 适合方程组

$$L_{lk}f(X) = 0,\ l,k = 1,\cdots,m. \qquad (5.2.32)$$

其中

$$L_{lk}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}\left(\delta_{lj}-\sum_{\gamma=1}^{n}x_{l\gamma}x_{j\gamma}\right)$$

$$\times\left(\delta_{\lambda\mu}-\sum_{p=1}^{n}x_{p\lambda}x_{p\mu}\right)\frac{\delta^2}{\delta x_{j\lambda}\delta x_{k\mu}}. \qquad (5.2.33)$$

用 $L_{lk}f=0$ 代替(5.2.31)的方程是因为经变换(5.2.6)后,由(5.2.11)知

$$\delta_{lj}-\sum_{\gamma=1}^{n}x_{l\gamma}x_{j\gamma}=\sum_{p,r=1}^{m}Q_{lp}(\delta_{pq}-\sum s_{p\gamma}s_{r\gamma})Q_{jr},$$

根据(5.2.27),L_{lk}经变换(5.2.6)有

$$L_{lk}(X)f=\sum_{p,r=1}^{m}Q_{lp}[L_{pr}(S)F]q_{rk}. \qquad (5.2.34)$$

如果令

$$L=(L_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant m}, \qquad (5.2.35)$$

即把算子 L_{jk}排列成一方阵,则(5.2.34)即

$$L_Xf=Q(L_Yf)Q^{-1}. \qquad (5.2.36)$$

由此可见

$$\sigma_j(L_Xf)=\sigma_j(L_Yf)\quad(j=1,\cdots,m) \qquad (5.2.37)$$

每一个都是不变微分算子. 当 $j=1$ 时,

$$\sigma_1(L_Xf)=\Delta f \qquad (5.2.38)$$

即是 Laplace-Beltrami 算子,其他的算子 $\sigma_j(Lf)(j>1)$则是非线性微分算子了.

定理 5.2.1 在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$内适合方程

$$\Delta f=0$$

且在 $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{R}}(m,n)$连续的函数 f 必适合一组微分方程

$$L_{jk}f=0\quad(j,k=1,\cdots,m).$$

它经过 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$的等度变换(5.2.6),有如下关系:

$$L_{jk}(X)f=\sum_{p,r=1}^{m}Q_{jp}(s)[L_{pr}(S)f]q_{rk}(S),$$

其中

$$(Q_{jk}(S))=(A+SB)^{-1},\ (q_{jk}(s))=A+SB.$$

此外,以上方程组与(5.2.6)变换下不变的方程组

$$\sigma_j(Lf) = 0 \quad (j = 1,\cdots,n)$$

等价,其中 $L=(L_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant m}$.

华罗庚[23]早在1956年在复的典型域$\mathfrak{R}_I(m,n)$的情形就曾指出:适合一个方程

$$\Delta f = 0$$

的函数 f,必适合一组方程

$$L_{jk}f = 0.$$

这里不过是把他所指出的事实,在实的典型域$\mathfrak{R}_R(m,n)$的情形加以严格的证明和更详细的讨论而已.这不仅在所有复的典型域,而且至少在所有大范围、不可约、非例外的Ⅲ型对称空间(参阅§6.4)亦成立.

这个事实非常重要,首先,当 $m>1$ 时,

$$L_{jk}f = 0$$

是超定方程,即方程式的个数多于未知函数的个数.华罗庚首先指出,这种超定方程有解,而且给定特征流形上连续的边界值后有唯一的解,但没有用附加什么积分条件.其次,他提出了一系列值得深思的重要问题,例如,我们考虑调和方程推广为Poisson方程时,是否应该是

$$L_{jk}f = f_0\delta_{jk},$$

还是

$$\Delta f = f_0?$$

同样地,考虑热核时应该考虑热核方程

$$L_{jk}f = \frac{\partial f}{\partial t}\delta_{jk} \quad 还是 \quad \Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}?$$

Green函数也存在同样问题,是否应考虑方程

$$L_{jk}f = \delta(X-Y)\delta_{jk} \quad 还是 \quad \Delta f = \delta(X-Y)$$

的解呢?这里 $\delta(X)$是 δ-函数.

在双圆盘 D_2 的情况,前两章开头已提到过,要构造方程

$$\Delta f = (1 - |z_1|^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + (1 - |z_2|^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0$$

的 Green 函数非常困难. 如果在 D_2 调和，即 $\Delta f = 0$ 在 $\overline{D}_2$ 连续的函数 f 必适合方程组：

$$\Delta_1 f = (1 - |z_1|^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = 0,$$

$$\Delta_2 f = (1 - |z_2|^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0,$$

为什么去求 $\Delta f = 0$ 的 Green 函数，而不去求方程组

$$\Delta_1 f = 0, \ \Delta_2 f = 0$$

的 Green 函数呢？后一方程组在双圆盘的 Green 函数自然就是

$$\frac{1}{\pi^2} \log \left| \frac{z_1 - w_1}{1 - \bar{z}_1 w_1} \right| \log \left| \frac{z_2 - w_2}{1 - \bar{z}_2 w_2} \right|.$$

从而问题就简单得多了. 但在不可约的典型域情形，不能排除这种可能，即考虑

$$\Delta f = \delta(X - Y) \quad 与 \quad L_{jk} f = \delta(X - Y)\delta_{jk}$$

的 Green 函数是一样的.

可惜华罗庚在指出这个重要性质之后，未进一步深入探讨，而作为他的学生，悟到其重要性时已晚了一些. 我不知道是否还有足够的时间去弄清楚这些问题，希望年轻有志之士能够弄清楚. 现在首先把 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 的不变度量的 Christoffel 符号表达出来，以便把算子 L_{jk} 具体写出来.

如上一节一样可证，此 Christoffel 在 $X_0 \in \mathfrak{R}_R(m,n)$ 能够表达为矩阵形式

$$\Gamma = \left[\mathrm{d} \left(\frac{\partial X}{\partial S} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial S} \right) \right]_{S = X_0}. \tag{5.2.39}$$

$\frac{\partial X}{\partial S}$ 是(5.2.6)的变换的函数矩阵，此变换把 X_0 点映为原点，这在(5.2.8)中取

$$D = (I - X'_0 X_0)^{-\frac{1}{2}}, \ C = - X_0 D,$$

$$A = (I - X_0X_0')^{-\frac{1}{2}},\ B = - X'_0A \qquad (5.2.40)$$

便可以了.

根据(5.2.23)

$$\frac{\partial X}{\partial S} = (A + XB)'^{-1} \cdot\times (D' + C'X)^{-1}, \qquad (5.2.41)$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{-1} &= - [\mathrm{d}XB(A + XB)^{-1}] \cdot\times I \\ &\quad + I \cdot\times [- (D' + C'X)^{-1}C'\mathrm{d}X] \\ &= \mathrm{d}XX_0'(I - XX_0')'^{-1} \cdot\times I \\ &\quad + I \cdot\times (I - X_0'X)^{-1}X_0'\mathrm{d}X. \qquad (5.2.42) \end{aligned}$$

特别是

$$\left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{-1}\right]_{X=X_0} = \mathrm{d}XX_0'(I - X_0X_0')^{-1} \cdot\times I + I \cdot\times (I - X_0'X_0)^{-1}X_0'\mathrm{d}X. \qquad (5.2.43)$$

由于 X_0 可以是 $\mathfrak{R}_R(m,n)$的任一点，把上式中的 X_0 换为 X，得

$$\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} (k\gamma) \\ (i\alpha)(j\beta) \end{matrix}\right\}\mathrm{d}x_{j\beta} &= \mathrm{d}\,\frac{\partial s_{p\lambda}}{\partial x_{i\alpha}}\frac{\partial x_{k\gamma}}{\partial s_{p\lambda}} \\ &= \mathrm{d}x_{k\lambda} \cdot x_{p\lambda}H_{pi}(X)\delta_{\alpha\gamma} \\ &\quad + \delta_{ki}K_{\alpha\lambda}(X)x_{p\lambda}\mathrm{d}x_{p\gamma}. \qquad (5.2.44) \end{aligned}$$

这里为了方便，用和号的省略. 指标

$$i, j, k, \cdots = 1, \cdots, m;$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots = 1, \cdots, n.$$

此外，

$$\begin{aligned} H(X) &= (H_{jk}(X)) = (I - XX')^{-1}, \\ K(X) &= (K_{\alpha\beta}(X)) = (I - X'X)^{-1}. \end{aligned} \qquad (5.2.45)$$

由(5.2.44)知，

$$\left\{\begin{matrix} (k\gamma) \\ (i\alpha)(j\beta) \end{matrix}\right\} = \delta_{jk}x_{p\beta}H_{pi}(X)\delta_{\alpha\gamma} + \delta_{ki}K_{\alpha\lambda}(X)x_{j\lambda}\delta_{\beta\gamma}. \qquad (5.2.46)$$

由于

$$X'(I-XX')^{-1}=(I-XX')^{-1}X', \qquad (5.2.47)$$

故有

$$x_{p\beta}H_{pi}(X)=K_{\beta\lambda}(X)x_{i\lambda}. \qquad (5.2.48)$$

以之代入(5.2.46),得出

$$\begin{aligned}(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\left\{\begin{matrix}(k\gamma)\\(i\alpha)(j\beta)\end{matrix}\right\}&=K^{\alpha\beta}(X)\left\{\begin{matrix}(k\gamma)\\(i\alpha)(j\beta)\end{matrix}\right\}\\&=\delta_{jk}x_{i\alpha}\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{ki}x_{j\beta}\delta_{\beta\gamma}\\&=\delta_{jk}x_{i\gamma}+\delta_{ki}x_{j\gamma}. \qquad (5.2.49)\end{aligned}$$

由此知

$$\begin{aligned}&(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\frac{\delta^2 f}{\delta x_{i\alpha}\delta x_{j\beta}}\\&=(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}}-\left\{\begin{matrix}(k\gamma)\\(i\alpha)(j\beta)\end{matrix}\right\}\frac{\partial f}{\partial x_{k\gamma}}\right]\\&=(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}}-x_{i\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_{j\gamma}}-x_{j\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_{i\gamma}}\end{aligned} \qquad (5.2.50)$$

及

$$\begin{aligned}L_{kj}f=&(\delta_{ki}-x_{k\lambda}x_{i\lambda})(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{j\beta}}\\&-(\delta_{ki}-x_{k\lambda}x_{i\lambda})x_{i\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_{j\gamma}}-x_{j\gamma}(\delta_{ki}-x_{k\lambda}x_{i\lambda})\frac{\partial f}{\partial x_{i\gamma}}.\end{aligned} \qquad (5.2.51)$$

(5.2.50)可写为

$$\begin{aligned}&(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\frac{\delta^2 f}{\delta x_{i\alpha}\delta x_{j\beta}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}}\left[\sqrt{g}(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\frac{\partial f}{\partial x_{j\beta}}\right]\\&\quad+\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}}\left[\sqrt{g}(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\frac{\partial f}{\partial x_{i\beta}}\right].\end{aligned}$$

其中 $g=(\det K)^{\frac{n-1}{2}}$,令

$$\frac{\partial}{\partial X}=\left(\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{1n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{mn}}\end{pmatrix}, \tag{5.2.52}$$

于是(5.2.50)即为

$$\begin{aligned}Mf&=\left[(\delta_{\alpha\beta}-x_{l\alpha}x_{l\beta})\frac{\delta^2 f}{\delta x_{i\alpha}\delta x_{j\beta}}\right]_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}\\&=\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial X}\left[\sqrt{g}(I-X'X)\frac{\partial f}{\partial X'}\right]\\&\quad+\frac{1}{2\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left[\sqrt{g}(I-X'X)\frac{\partial f}{\partial X'}\right]\right\}',\end{aligned}\tag{5.2.53}$$

式中

$$\frac{\partial f}{\partial X'}=\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)'f.$$

于是

$$Lf=(I-XX')Mf. \tag{5.2.54}$$

给与 f_0，考虑方程组

$$Lf=f_0I \tag{5.2.55}$$

或者

$$Lf=\frac{\partial f}{\partial t}I \tag{5.2.56}$$

的基本解，是作者现在还未有办法解决的问题，只好留待以后或后人去解决了.

现在仅考虑 $\mathfrak{R}_R(m,n)$的不变度量测地线方程组

$$\frac{d^2x_{k\gamma}}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}(k\gamma)\\(i\alpha)(j\beta)\end{matrix}\right\}\frac{dx_{i\alpha}}{ds}\cdot\frac{dx_{j\beta}}{ds}=0. \tag{5.2.57}$$

如§5.1一样，可以由(5.2.46)得出以上方程的矩阵形式

$$\frac{d^2X}{ds^2}+(I-XX')^{-1}\frac{dX'}{ds}\frac{dX}{ds}+\frac{dX}{ds}(I-XX)^{-1}X'\frac{dX}{ds}=0. \tag{5.2.58}$$

过 $\mathfrak{R}_R(m,n)$中任两点的测地线，可以经(5.2.6)的适当变换，把它化为过0点与 Λ 点的测地线

$$\Lambda = (\lambda_{j\alpha}), \quad \lambda_{j\alpha} = \begin{cases} \lambda_j \geqslant 0, \text{当 } \alpha = j; \\ 0, \text{当 } \alpha \neq j. \end{cases}$$

于是测地线为

$$X(s) = (x_{j\alpha}(s)),\ x_{j\alpha}(s) = \begin{cases} 0, \text{当 } \alpha \neq j; \\ \operatorname{th} a_j s,\ \text{当 } \alpha = j, \end{cases} \tag{5.2.59}$$

式中 $$a_j = \frac{1}{s_0} \log \frac{1-\lambda_j}{1+\lambda_j},\ j = 1, \cdots, m,$$

其中 $0 \leqslant s \leqslant s_0$，$s_0$ 为 0 与 Λ 的测地线长度，即

$$s_0 = r(0, \Lambda) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\log\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.60}$$

如令

$$r_j = r_j(0, \Lambda) = \frac{1}{2} \log \frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}, \tag{5.2.61}$$

则有

$$\lambda_j = \operatorname{th} r_j = \operatorname{th} r_j(0, \Lambda). \tag{5.2.62}$$

由于任两点 X、$Y \in \mathfrak{R}_R(m,n)$ 可以经变换(5.2.6)变为 0 与 Λ 点，两测地线长度是经此变换不变的，因此，由(5.2.60)知

$$\begin{aligned} r(X,Y) &= r(\tau_Y(X), \tau_Y(Y)) \\ &= r(\Lambda, 0) = \left[\sum_{j=1}^{m} r_j^2(r_Y(X), 0)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.2.63}$$

令

$$r_j(X,Y) = r_j(\tau_Y(X), 0), \tag{5.2.64}$$

则有

$$r(X,Y) = \{r_j^2(X,Y) + \cdots + r_m^2(X,Y)\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.65}$$

此外，由上面的讨论可知，实矩阵的极坐标表示

$$X = U\Lambda V,\ U \text{ 与 } V \text{ 为实正交方阵}.$$

$$\Lambda = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}, 0\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \text{th } r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \text{th } r_m \end{pmatrix}, 0 \right), \tag{5.2.66}$$

其中 $r_1,\cdots,r_m$ 的平方和是 0 点至 X 点的测地线距离. 记

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix},$$

则

$$X = U \begin{pmatrix} \text{th } r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \text{th } r_m \end{pmatrix} V_1, \quad V_1 V_1' = 1. \tag{5.2.67}$$

$r_1,\cdots,r_m$ 与 U 及 V_1 的局部坐标一起称之为伪测地坐标. $r_1,\cdots,r_m$ 除次序以外,唯一地确定. 如规定 $r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_m \geqslant 0$,则任一点的伪测地坐标唯一确定.

§ 5.3　不变度量的 Laplace-Beltrami 算子

实典型域 $\mathfrak{R}_R(m,n)(m \leqslant n)$ 的不变度量(5.2.19)可写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \text{tr}[(I - YY')^{-1} dY (I - Y'Y)^{-1} dY'] \\ &= \text{tr}[(I - YY')^{-1} dY Y' (I - YY')^{-1} Y dY'] \\ &\quad + \text{tr}[(I - YY')^{-1} dY dY']. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

现用矩阵极坐标表示上式. $m \times n$ 实矩阵 Y 可写为

$$Y = U(\Lambda, 0) V,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \lambda_1,\cdots,\lambda_m \text{ 非负}, \tag{5.3.2}$$

其中 U 与 V 分别为 m 与 n 阶实正交方阵(《典》著的附录). 由于

$$dY = U[(d\Lambda, 0) + \delta U(\Lambda, 0) + (\Lambda, 0)\delta_1 V]V, \tag{5.3.3}$$

其中

$$\delta U = U^{-1} dU = (\varphi_{jk}),$$

$$\delta_1 V = \mathrm{d}V \cdot V^{-1} = (\psi_{\alpha\beta}) = -\delta_1 V'. \tag{5.3.4}$$

记

$$\delta_1 V = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & * \end{pmatrix}\begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix}, \tag{5.3.5}$$
$$\quad m \quad n-m$$

则(5.3.1)可写为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \mathrm{tr}[(I-\Lambda\Lambda')^{-1}(\mathrm{d}\Lambda + \delta U\Lambda + \Lambda\Psi_1)(I-\Lambda'\Lambda)^{-1} \\ & \times (\mathrm{d}\Lambda + \delta U\Lambda + \Lambda\Psi_1)'] + \mathrm{tr}[(I-\Lambda\Lambda')^{-1}\Lambda\Psi_2\Psi_2'\Lambda'] \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \mathrm{tr}[(I-\Lambda\Lambda')^{-1}\mathrm{d}\Lambda(I-\Lambda'\Lambda)^{-1}\mathrm{d}\Lambda'] \\ & + \mathrm{tr}[(I-\Lambda\Lambda')^{-1}(\delta U\Lambda + \Lambda\Psi_1)(I-\Lambda'\Lambda)^{-1} \\ & \times (\delta U\Lambda + \Lambda\Psi_1)'] + \mathrm{tr}[\Lambda'(I-\Lambda\Lambda')^{-1}\Lambda\Psi_2\Psi_2']. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

因为 δU 与 Ψ_1 皆是反称的,故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\mathrm{dlog}\,\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right)^2 + \sum_{j,k=1}^{m}\left[\frac{\varphi_{jk}\lambda_k + \lambda_j\psi_{jk}}{\sqrt{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)}}\right]^2 \\ & + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n-m}\left[\frac{\lambda_j\psi_{j\alpha}}{\sqrt{1-\lambda_j^2}}\right]^2 \\ = {} & \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\mathrm{dlog}\,\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right]^2 + \sum_{j<k}\left[\frac{(\varphi_{jk}\lambda_k + \lambda_j\psi_{jk})^2}{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)}\right. \\ & \left. + \frac{(\varphi_{jk}\lambda_j + \lambda_k\psi_{jk})^2}{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)}\right] + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n-m}\frac{\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2}(\psi_{j\alpha})^2 \\ = {} & \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\mathrm{dlog}\,\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right]^2 + \sum_{j<k}\frac{1}{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)}(\varphi_{jk},\psi_{jk}) \\ & \times \begin{pmatrix} \lambda_j^2+\lambda_k^2 & 2\lambda_j\lambda_k \\ 2\lambda_k\lambda_j & \lambda_j^2+\lambda_k^2 \end{pmatrix}(\varphi_{jk},\psi_{jk})' + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n-m}\frac{\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2}(\psi_{jk})^2. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

这就是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$不变度量的矩阵极坐标表示.

令

$$r_j = \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}, \quad \text{或者} \quad \lambda_j = \operatorname{th} r_j,$$

则 $r_1,\cdots,r_m$ 与 U 的局部坐标 $\theta_1,\cdots,\theta_{\frac{1}{2}m(m-1)}$ 及 Stiefel 流形

$$V_1V_1' = I \ (V_1 \text{ 为 } m\times n \text{ 实方阵})$$

的局部坐标 $\theta_{\frac{1}{2}m(m-1)+1},\cdots,\theta_{mn-m}$ 一起 $(r_1,\cdots,r_m,\theta_1,\cdots,\theta_{mn-m})$ 称为以0点为中心的伪测地坐标，$r_1,\cdots,r_m$ 称为此坐标的径向部分. 对于伪测地坐标

$$\begin{aligned} ds^2 = & \sum_{j=1}^m dr_j^2 + \sum_{j<k}\operatorname{ch}^2 r_j \operatorname{ch}^2 r_k (\varphi_{jk},\psi_{jk}) \\ & \times \begin{pmatrix} \operatorname{th}^2 r_j + \operatorname{th}^2 r_k & 2\operatorname{th} r_j \operatorname{th} r_k \\ 2\operatorname{th} r_k \operatorname{th} r_j & \operatorname{th}^2 r_j + \operatorname{th}^2 r_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{jk} \\ \psi_{jk} \end{pmatrix} \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{n-m} \operatorname{sh}^2 r_j \cdot (\psi_{j\alpha})^2. \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

因此，$\mathfrak{R}_R(m,n)$ 的不变体积元素为

$$\begin{aligned} \dot{Y} = & \prod_{j=1}^m (1-\lambda_j^2)^{-1} \left| \prod_{j<k} \frac{\lambda_j^2-\lambda_k^2}{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)} \right| \\ & \times \prod_{j=1}^m \left[\frac{\lambda_j}{\sqrt{1-\lambda_j^2}}\right]^{n-m} d\lambda_1\cdots d\lambda_m \prod_{j<k}(\varphi_{jk}\psi_{jk})^2 \cdot \prod_{j=1}^m\prod_{\alpha=1}^{n-m}\psi_{j\alpha} \\ = & \left|\prod_{j<k}(\operatorname{sh}^2 r_j - \operatorname{sh}^2 r_k)\right| \cdot \prod_{j=1}^m \operatorname{sh}^{n-m} r_j \\ & \times dr_1\cdots dr_m \prod_{j<k}(\varphi_{jk}\psi_{jk}) \prod_{j=1}^m\prod_{\alpha=1}^{n-m}\psi_{j\alpha} \\ = & \left|\omega_0(r_1,\cdots,r_m)\right| \prod_{j=1}^m \operatorname{sh}^{n-m} r_j \psi_0(\theta) dr_1\cdots dr_m \\ & \times d\theta_1\cdots d\theta_{mn-m} \\ = & \sqrt{g}\, dr_1\cdots dr_m d\theta_1\cdots d\theta_{mn-m}, \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

式中

$$\omega_0(r_1,\cdots,r_m) = \prod_{j<k}(\operatorname{sh}^2 r_j - \operatorname{sh}^2 r_k), \tag{5.3.11}$$

$$\sqrt{g} = |\omega_0(r_1,\cdots,r_m)| \prod_{j=1}^{m} \mathrm{sh}^{n-m} r_j \psi_0(\theta), \quad (5.3.12)$$

其中

$$\psi_0(\theta) = \psi_0(\theta_1,\cdots,\theta_{nm-m}) \quad (5.3.13)$$

是仅包含 $\theta_1,\cdots,\theta_{mn-m}$的函数. 令

$$(\sigma^1,\cdots,\sigma^{mn}) = (r_1,\cdots,r_m,\theta_1,\cdots,\theta_{mn-m}), \quad (5.3.14)$$

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{mn} g_{jk} d\sigma^j d\sigma^k.$$

于是 Laplace-Beltrami 算子为

$$\Delta f = \frac{1}{\omega_0} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mathrm{sh}^{n-m} r_j} \frac{\partial}{\partial r_j}\left[\omega_0 \mathrm{sh}^{n-m} r_j \frac{\partial f}{\partial r_j}\right] + \frac{1}{\psi_0(\theta)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{mn-m} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}\left[\psi_0(\theta) g^{m+\alpha,m+\beta} \frac{\partial f}{\partial \theta_\beta}\right]. \quad (5.3.15)$$

这是 Laplace-Beltrami 算子的伪测地坐标表示.

为了用内切超圆坐标表示 Δ,先用变换(5.1.19)把$\mathfrak{R}_R(m,n)$映为无界域 $\mathfrak{H}_R(m,n)$,其次在此空间引进度量

$$d\sigma^2 = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{X_1+X_1'}{2} - X_2X_2'\right)^{-1}(dX_1 - 2dX_2X_2') \times \left(\frac{X_1+X_1'}{2} - X_2X_2'\right)^{-1}(dX_1 - 2dX_2X_2')'\right] + 4\mathrm{tr}\left[\left(\frac{X_1+X_1'}{2} - X_2X_2'\right)^{-1} dX_2 dX_2'\right]. \quad (5.3.16)$$

此度量在(5.1.22)的变换下不变,因为有

$$\frac{1}{2}(X_1+X_1') - X_2X_2' = A'\left[\frac{1}{2}(T_1+T_1')' - T_2T_2'\right]A, \quad (5.3.17)$$

及

$$dX_2 = A'dT_2,$$

$$dX_1 - 2dX_2X_2' = A'(dT_1 - 2dT_2 \cdot T_2')A. \quad (5.3.18)$$

度量 $d\sigma^2$系由 $\mathfrak{R}_R(m,n)$的 ds^2所诱导. 为证明此点,要证明把变换(5.1.19)代入 ds^2得出 $d\sigma^2$,但两者皆是不变度量,我们只须证明在 $Y=0$点对应的 $X=(I,0)$代入便足够了,实际上,此时由(5.1.19)

知

$$dY|_{X=(I,0)} = (-dX_1, 2dX_2),$$

$$ds^2|_{Y=0} = \mathrm{tr}(dYdY') = \mathrm{tr}\left[dX_1dX_1' + 4dX_2dX_2'\right].$$

另一方面

$$d\sigma^2|_{X=(I,0)} = \mathrm{tr}(dX_1, dX_1') + 4\mathrm{tr}(dX_2dX_2'),$$

因此有

$$ds^2|_{Y=0} = d\sigma^2|_{X=(I,0)}.$$

这即是所要证的.因此我们仍用 ds^2 表示(5.3.16)定义的度量,把它看作是 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 的度量的内切超圆坐标表示.

变换(5.1.26)把 $\mathfrak{H}_R(m,n)$ 一一地映为群流形 $\Gamma_R(m,n)$. 由(5.1.26)知

$$\begin{aligned} dX_1 &= A'[\delta A(I + BB' + K) + (I + BB' - K)\delta A' \\ &\quad + dBB' + BdB' + dK]A, \\ dX_2 &= -A'(\delta AB + dB), \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

其中

$$\delta A = A'^{-1}dA'. \tag{5.3.20}$$

故

$$dX_1 - 2dX_2X_2' = A'(\delta A + \delta A' + \Omega)A, \tag{5.3.21}$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega &= dK + BB'\delta A' - \delta ABB' + (BdB' - dBB') \\ &\quad + (\delta AK - K\delta A'). \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

此外,由(5.1.26)知

$$\frac{1}{2}(X_1 + X_1') - X_2X_2' = A'A. \tag{5.3.23}$$

因此

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \mathrm{tr}[(\delta A + \delta A' + \Omega)(\delta A + \delta A' + \Omega')] \\ &\quad + 4\mathrm{tr}[(\delta AB + dB)(\delta AB + dB)'] \\ &= \sum_{j,k=1}^{mn} h_{jk}(\sigma)d\sigma^j d\sigma^k, \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

其中 σ^j 是内切超圆坐标的(A,B,K)的独立参数，为了计算 $h_{jk}(\sigma)$，即计算 $mn\times mn$ 方阵

$$H(\sigma)=(h_{jk}(\sigma)), \tag{5.3.25}$$

我们需要利用 $\Gamma_{\mathrm{R}}(m,n)$是一群流形的性质.每一点 $\sigma\in\Gamma_{\mathrm{R}}(m,n)$ 可看作是作用于$\mathfrak{H}_{\mathrm{R}}(m,n)$的一个变换

$$\sigma: T\mapsto X=T\sigma,\ T\in\mathfrak{H}_{\mathrm{R}}(m,n).$$

引理5.3.1 设 $\mathfrak{D}$ 是 R^N 的一个域(也可能是无界域)，$\mathfrak{G}$ 是一个 N 维李群，可递地作用于 $\mathfrak{D}$.假设 $\mathfrak{D}$ 有黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{j,k=1}^{N}g_{jk}(x)\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k,$$

它在群 $\mathfrak{G}$ 下是不变的，$\mathfrak{G}$ 是从右作用于 $\mathfrak{D}$，则我们可用 $\mathfrak{G}$ 的局部坐标表示 $\mathrm{d}s^2$，即对 $\mathfrak{D}$ 中一个固定点 x_0，我们可用 $\mathfrak{G}$ 的局部坐标表示 $\mathrm{d}s^2$，使得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\sum_{j,k=1}^{N}g_{jk}(x_0\sigma)^j\mathrm{d}(x_0\sigma)^k\\&=\sum_{a,b=1}^{N}h_{ab}(\sigma)\mathrm{d}\sigma^a\mathrm{d}\sigma^b,\end{aligned}$$

在此我们以 $\sigma^a(a=1,\cdots,N)$表示 $\sigma\in\mathfrak{G}$ 的局部坐标.此外，若令

$$H(\sigma)=(h_{jk}(\sigma))_{1\leqslant j,k\leqslant N},$$

$\sigma\tau$ 为群的元素 σ、$\tau\in\mathfrak{G}$ 的群乘积，e 为 $\mathfrak{G}$ 的幺元素，$R_\tau:\sigma\mapsto\sigma\tau$ 是 $\mathfrak{G}$ 中的右移，此右移的函数矩阵设为

$$\frac{\partial(\sigma r)}{\partial\sigma}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(\sigma\tau)^1}{\partial\sigma^1}&\cdots&\dfrac{\partial(\sigma\tau)^N}{\partial\sigma^1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\dfrac{\partial(\sigma\tau)^1}{\partial\sigma^N}&\cdots&\dfrac{\partial(\sigma\tau)^N}{\partial\sigma^N}\end{pmatrix},$$

其中$(\sigma\tau)^a$ 为 $\sigma\tau$ 的局部坐标，则有

$$[H(\sigma)]^{-1}=\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}^{\prime-1}[H(e)]^{-1}\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}^{-1}.$$

证 由于 $\mathrm{d}s^2$是在 $\mathfrak{G}$ 下不变，并从右作用于 $\mathfrak{D}$，即当 $x\in\mathfrak{D}$，$\sigma\in\mathfrak{D}$时，有

$$\sum g_{jk}(x\sigma)\mathrm{d}(x\sigma)^j\mathrm{d}(x\sigma)^k = \sum g_{jk}(x)\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k.$$

同样,当 $\tau\in\mathfrak{G}$ 时,有

$$\sum g_{jk}(x\sigma\tau)\mathrm{d}(x\sigma\tau)^j\mathrm{d}(x\sigma\tau)^k = \sum g_{jk}(x\sigma)\mathrm{d}(x\sigma)^j\mathrm{d}(x\sigma)^k.$$

以 $x=x_0$代入,便得

$$\sum h_{ab}(\sigma\tau)\mathrm{d}(\sigma\tau)^a\mathrm{d}(\sigma\tau)^b = \sum h_{ab}(\sigma)\mathrm{d}\sigma^a\mathrm{d}\sigma^b.$$

由此知

$$H(\sigma) = \left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]_{\tau=\sigma^{-1}} H(e)\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]'_{\tau=\sigma^{-1}}.$$

引理证毕. ▌

设$(\sigma r)^a$ 为 $\sigma r\in\mathfrak{G}$ 的局部坐标,则有

$$\mathrm{d}(\sigma\tau)^a = \sum_{b=1}^{N}\frac{\partial(\sigma\tau)^a}{\partial\sigma^b}\mathrm{d}\sigma^b.$$

令

$$\mathrm{d}\chi^a = [\mathrm{d}(\sigma r)^a]_{\tau=\sigma^{-1}} = \sum_{b=1}^{N}\left[\frac{\partial(\sigma\tau)^a}{\partial\sigma^b}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}\mathrm{d}\sigma^b,$$

$$\frac{\mathrm{d}\chi^a}{\mathrm{d}\sigma^b} = \left[\frac{\partial(\sigma\tau)^a}{\partial\sigma^b}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}\sigma^a}{\mathrm{d}\chi^b} = \left[\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]^{-1}_{\tau=\sigma^{-1}}\right]^a_b. \tag{5.3.26}$$

则引理5.3.1中包含了

$$h^{ab}(\sigma) = \sum_{c,\mathrm{d}=1}^{N} e^{c\mathrm{d}}\frac{\mathrm{d}\sigma^a}{\mathrm{d}\chi^c}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma^b}{\mathrm{d}\chi^b}, \tag{5.3.27}$$

其中

$$e^{c\mathrm{d}} = h^{c\mathrm{d}}(e).$$

此外,令

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\chi} = \left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]^{-1}_{\tau=\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\sigma^1}{\mathrm{d}\chi^1} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\sigma^N}{\mathrm{d}\chi^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}\sigma^1}{\mathrm{d}\chi^N} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\sigma^N}{\mathrm{d}\chi^N} \end{pmatrix}. \tag{5.3.28}$$

由于

$$h = \det H(\sigma) = c\left[\det\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\sigma}\right],$$

故

$$\Delta f = \frac{1}{\left|\det \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\sigma}\right|} \sum_{a,b=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \sigma^a} \left[\left|\det \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\sigma}\right| \sum_{l,k=1}^{N} e^{lk} \frac{\mathrm{d}\sigma^a}{\mathrm{d}\chi^l} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^b}{\mathrm{d}\chi^k} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma^b} \right].$$

由于 $\mathfrak{H}_{\mathrm{R}}(m,n)$的维数 $N=mn$ 与 $\Gamma_{\mathrm{R}}(m,n)$的维数一样，我们可应用引理5.3.1来计算(5.3.24). 令 x_0为 $\mathfrak{H}_{\mathrm{R}}(m,n)$的$(I,0)$点，以 $\sigma:T\mapsto X=T\sigma$ 表示变换(5.1.22)，以 $\tau:X\mapsto \widetilde{X}=X\tau$ 表示变换

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &= A_1'(X_1 + K_1 - 2X_2B_1' + B_1B_1')A_1, \\ \widetilde{X}_2 &= A_1'(X_2 - B_1), \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

其中(A_1,B_1,K_1)适合相当于(5.1.23)的条件，并且 A_1是上三角方阵，对角线上的元素为正. 则变换 $\sigma\tau:T\mapsto \widetilde{X}=T\sigma\tau$ 有

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &= \widetilde{A}'(T_1 + \widetilde{K} - 2T_2\widetilde{B} + \widetilde{B}\widetilde{B})\widetilde{A}, \\ \widetilde{X}_2 &= \widetilde{A}(X_2 - \widetilde{B}), \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

其中

$$\begin{aligned} &\widetilde{A} = AA_1,\ \widetilde{B} = B + A'^{-1}B_1, \\ &\widetilde{K} = K + A'^{-1}K_1A^{-1} + BB_1'A^{-1} - A'^{-1}B_1B'. \end{aligned} \tag{5.3.31}$$

当 $\tau=\sigma^{-1}$，即

$$A_1 = A^{-1},\ B_1 = -A'B,\ K_1 = -A'KA. \tag{5.3.32}$$

应用引理5.3.1，要计算(5.3.24)度量方阵 $H(\sigma)$的值，即要计算

$$\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial \sigma}\right]^{-1}_{\tau=\sigma^{-1}} = \frac{\mathrm{d}(a,b,k)}{\mathrm{d}(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{k})} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\widetilde{a}} & \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\widetilde{a}} & \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\widetilde{a}} \\ \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\widetilde{b}} & \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\widetilde{b}} & \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\widetilde{b}} \\ \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\widetilde{k}} & \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\widetilde{k}} & \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\widetilde{k}} \end{pmatrix}. \tag{5.3.33}$$

微分(5.3.31)有

$$\mathrm{d}\widetilde{A} = A_1\mathrm{d}\dot{A},$$

$$\mathrm{d}\widetilde{B} = \mathrm{d}B - A'^{-1}\mathrm{d}A' \cdot A'^{-1}B_1,$$

$$\mathrm{d}\widetilde{K} = \mathrm{d}K - A'^{-1}\mathrm{d}A'A'^{-1}K_1A^{-1} - A'^{-1}K_1A^{-1}\mathrm{d}AA^{-1}$$

$$- (BB_1'A^{-1}\mathrm{d}AA^{-1} - A'^{-1}\mathrm{d}A'A'^{-1}B_1B') + (\mathrm{d}BB_1'A^{-1} - A'^{-1}B_1\mathrm{d}B'). \qquad (5.3.34)$$

把(A_1,B_1,K_1)以(5.3.32)的值代入上式，便得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widetilde{A} &= A^{-1}\mathrm{d}A, \\ \mathrm{d}\widetilde{B} &= \mathrm{d}B + A'^{-1}\mathrm{d}A'B, \\ \mathrm{d}\widetilde{K} &= \mathrm{d}K + A'^{-1}\mathrm{d}A'(K - BB') + (K + BB')\mathrm{d}AA^{-1} \\ &\quad - (\mathrm{d}BB' - B\mathrm{d}B'). \end{aligned} \qquad (5.3.35)$$

将以上方程作为 $\mathrm{d}A$、$\mathrm{d}B$、$\mathrm{d}K$ 的方程，自然有：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= A\mathrm{d}\widetilde{A}, \\ \mathrm{d}B &= \mathrm{d}\widetilde{B} - \mathrm{d}\widetilde{A}'B, \\ \mathrm{d}K &= \mathrm{d}\widetilde{K} - \mathrm{d}\widetilde{A}'K - K\mathrm{d}\widetilde{A} + \mathrm{d}\widetilde{B}B' - B\mathrm{d}\widetilde{B}'. \end{aligned} \qquad (5.3.36)$$

如果把上式看作是 $\mathrm{d}A$、$\mathrm{d}B$、$\mathrm{d}K$ 与 $\mathrm{d}\widetilde{A}$、$\mathrm{d}\widetilde{B}$、$\mathrm{d}\widetilde{K}$ 的元素的线性方程组，这个方程组的系数所成的矩阵即为 $\left[\dfrac{\partial(\sigma r)}{\partial \sigma}\right]^{-1}_{r=\sigma^{-1}}$. 为了计算此线性方程组的系数，令

$$A = (a_{pq}),\ 其中\ a_{pp} > 0,\ 当\ p > q\ 时, a_{pq} = 0.$$

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{pq}),\ 其中\ \widetilde{a}_{pp} > 0,\ 当\ p > q\ 时, \widetilde{a}_{pq} = 0.$$

由(5.3.36)的第一组方程知

$$\mathrm{d}a_{pq} = \sum_{l=1}^{m} a_{pl}\mathrm{d}\widetilde{a}_{lq} = \sum_{p\leqslant l\leqslant q} \mathrm{d}\widetilde{a}_{lq}a_{pl},$$

此即

$$\mathrm{d}a_{pp} = \mathrm{d}\widetilde{a}_{pp}a_{pp},\ p = 1,\cdots,m, \qquad (5.3.37)$$

$$\mathrm{d}a_{pq} = \mathrm{d}\widetilde{a}_{qq}a_{pq} + \mathrm{d}\widetilde{a}_{pq}a_{pp} + \sum_{l=p+1}^{q-1}\mathrm{d}\widetilde{a}_{lq}a_{pl},\ 当\ p < q\ 时.$$

令

$$a_{pp} = e^{u_p},\ p = 1,\cdots,m, \qquad (5.3.38)$$

则(5.3.37)即为

$$\mathrm{d}u_p = \mathrm{d}\widetilde{a}_{pp},\ p = 1,\cdots,m; \qquad (5.3.39)$$

$$\mathrm{d}a_{pq} = \mathrm{d}\widetilde{a}_{qq}a_{pq} + \mathrm{d}\widetilde{a}_{pq}e^{u_p} + \sum_{l=p+1}^{q-1}\mathrm{d}\widetilde{a}_{lq}a_{pl}. \qquad (5.3.40)$$

用(5.3.26)的符号,上式即为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}\widetilde{a}_{jj}} = \delta_{pj}, \quad p, j = 1, \cdots, m, \\ &\frac{\mathrm{d}a_{pq}}{\mathrm{d}\widetilde{a}_{jj}} = \delta_{qj} a_{pq}, \quad p < q. \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

将 A 与 $\widetilde{A}$ 的独立元素如下排列:

$$\begin{aligned} &a = (u_1, \cdots, u_m, a_{12}, \cdots, a_{1m}, a_{23}, \cdots, a_{2m}, \cdots, a_{m-1,m}), \\ &\widetilde{a} = (\widetilde{a}_{11}, \cdots, \widetilde{a}_{mm}, \widetilde{a}_{12}, \cdots, \widetilde{a}_{1m}, \widetilde{a}_{23}, \cdots, \widetilde{a}_{2m}, \cdots, \widetilde{a}_{m-1,m}). \end{aligned} \tag{5.3.42}$$

由(5.3.39)与(5.3.40)可知

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\widetilde{a}} = \begin{pmatrix} I^{(m)} & R_1 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}, \tag{5.3.43}$$

其中 R_1 是 $m \times \frac{1}{2}m(m-1)$ 矩阵,其元素或是0或是 $a_{pl}(p<l)$ 的一次项,L_1 是 $\frac{1}{2}m(m-1)$ 阶的上三角方阵,有 $m-1$ 个 e^{u_1},有 $m-2$ 个 e^{u_2},…,有1个 $e^{u_{m-1}}$,但 e^{u_m} 不出现,此即

$$L_1 = \begin{pmatrix} e^{u_1} & & & & \\ & \ddots & & * & \\ & & e^{u_1} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & e^{u_{m-1}} \end{pmatrix},$$

$$\det L_1 = \exp \sum_{j=1}^{m} (m-j) u_j. \tag{5.3.44}$$

令 $B = (b_{j\alpha})$, $\widetilde{B} = (\widetilde{b}_{j\alpha})$. 由(5.3.36)第二组方程知

$$\begin{aligned} \mathrm{d}b_{p\beta} &= \mathrm{d}\widetilde{b}_{p\beta} - \sum_{l=1}^{m} \mathrm{d}\widetilde{a}_{pl} b_{l\beta} \\ &= \mathrm{d}\widetilde{b}_{p\beta} - \mathrm{d}\widetilde{a}_{pp} b_{p\beta} - \sum_{l=p+1}^{m} \mathrm{d}\widetilde{a}_{pl} b_{l\beta}, \quad \beta = 1, \cdots, n-m. \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

特别是

$$\frac{\mathrm{d}b_{p\beta}}{\mathrm{d}\widetilde{a}_{jj}} = -\delta_{jp} b_{p\beta}, \quad j = 1, \cdots, m; \quad \beta = 1, \cdots, n-m. \tag{5.3.46}$$

把 B 与 $\widetilde{B}$ 的元素排列成

$$b=(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,n-m},\cdots,b_{m1},b_{m2},\cdots,b_{m,n-m}),$$
$$\widetilde{b}=(\widetilde{b}_{11},\widetilde{b}_{12},\cdots,\widetilde{b}_{1,n-m},\cdots,\widetilde{b}_{m1},\widetilde{b}_{m2},\cdots,\widetilde{b}_{m,n-m}).\quad(5.3.47)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\widetilde{b}}=I,\ \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\widetilde{a}}=\begin{pmatrix}R_2\\L_2\end{pmatrix},\quad(5.3.48)$$

其中 R_2 为 $m\times m(n-m)$ 矩阵，其元素或是0，或是 $b_{p\beta}$ 的一次项.

令 $K=(k_{pq}),\widetilde{K}=(\widetilde{k}_{pq})$，这都是反称方阵，由(5.3.36)第三组方程知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}k_{pq}=&\mathrm{d}\widetilde{k}_{pq}-\sum_{l=1}^{m}\mathrm{d}\widetilde{a}_{lp}k_{lq}-\sum_{l=1}^{m}k_{pl}\mathrm{d}\widetilde{a}_{lq}\\&+\sum_{\beta=1}^{n-m}(\mathrm{d}\widetilde{b}_{p\beta}b_{q\beta}-b_{p\beta}\mathrm{d}\widetilde{b}_{q\beta})\\=&\mathrm{d}\widetilde{k}_{pq}-\mathrm{d}\widetilde{a}_{pp}k_{pq}-\mathrm{d}\widetilde{a}_{qq}k_{pq}-\sum_{l=1}^{p-1}\mathrm{d}\widetilde{a}_{lp}k_{lq}\\&+\sum_{l=1}^{q-1}\mathrm{d}\widetilde{a}_{lq}k_{lp}-\sum_{\beta=1}^{n-m}(\mathrm{d}\widetilde{b}_{p\beta}b_{q\beta}-\mathrm{d}\widetilde{b}_{q\beta}b_{p\beta}),\end{aligned}$$

当 $p<q$ 时.　　(5.3.49)

特别是

$$\frac{\mathrm{d}k_{pq}}{\mathrm{d}\widetilde{a}_{jj}}=-(\delta_{jp}+\delta_{jq})k_{pq},\ \text{当 } p<q \text{ 时}.\quad(5.3.50)$$

把 $K=(k_{pq})$ 与 $\widetilde{K}=(\widetilde{k}_{pq})$ 的独立元素排列成向量

$$\begin{aligned}k&=(k_{12},k_{13},\cdots,k_{1m},\cdots,k_{m-1,m}),\\\widetilde{k}&=(\widetilde{k}_{12},\widetilde{k}_{13},\cdots,\widetilde{k}_{1m},\cdots,\widetilde{k}_{m-1,m}),\end{aligned}\quad(5.3.51)$$

由(5.3.49)知

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\widetilde{k}}=I,\ \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\widetilde{a}}=\begin{pmatrix}R_3\\L_3\end{pmatrix},\ \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\widetilde{b}}=M,\quad(5.3.52)$$

其中 R_3 是 $m\times\frac{1}{2}m(m-1)$ 矩阵，其元素或为0，或为 k_{pq} 的一次项，L_3 亦然. 但这是 $\frac{1}{2}m(m-1)\times\frac{1}{2}m(m-1)$ 方阵. M 是 $m(n-m)\times$

$\frac{1}{2}m(m-1)$矩阵，它的元素是 $b_{j\beta}$的线性函数.

由(5.3.43)、(5.3.48)与(5.3.52)得出

$$\left[\frac{\partial(\sigma r)}{\partial \sigma}\right]^{-1}_{r=\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} I & R_1 & R_2 & R_3 \\ 0 & L_1 & L_2 & L_3 \\ 0 & 0 & I & M \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ \frac{1}{2}m(m-1) \\ m(n-m) \\ \frac{1}{2}m(m-1) \end{matrix}. \tag{5.3.53}$$

为了计算 $H(e)$，可在(5.3.24)取 $A=I$，$B=0$，$K=0$，便有

$$\begin{aligned} ds^2 &= [(dA + dA')^2] + \operatorname{tr}(dKdK') + 4\operatorname{tr}(dBdB') \\ &= 4\sum_{j=1}^{m}(du_j)^2 + 2\sum_{j<k}(da_{jk})^2 \\ &\quad + 4\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n-m}(db_{j\beta})^2 + 2\sum_{j<k}(dk_{jk})^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^{mn} h_{jk}(e)d\sigma^j d\sigma^k. \end{aligned} \tag{5.3.54}$$

令

$$u = (u^1, \cdots, u^{mn}) = (a, b, k), \tag{5.3.55}$$

则

$$H(e) = 4I^{(m)} \oplus 2I^{\left(\frac{1}{2}m(m-1)\right)} \oplus 4I^{(m(n-m))} \oplus 2I^{\left(\frac{1}{2}m(m-1)\right)}, \tag{5.3.56}$$

其中 $A\oplus B$ 表示矩阵 A 与 B 的直和，即

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

因此

$$[H(e)]^{-1} = \frac{1}{4}I^{(m)} \oplus \frac{1}{2}I^{\left(\frac{1}{2}m(m-1)\right)} \oplus \frac{1}{4}I^{(m(m-1))} \oplus \frac{1}{2}I^{\left(\frac{1}{2}m(m-1)\right)}. \tag{5.3.57}$$

根据引理5.3.1及(5.3.53)、(5.3.57)有

$$
[H(\sigma)]^{-1}=\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}^{\prime-1}[H(e)]^{-1}\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}^{-1}
$$

$$
=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ R_1' & L_1' & 0 & 0\\ R_2' & L_2' & I & 0\\ R_3' & L_3' & M' & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}I & & & \\ & \frac{1}{2}I & & \\ & & \frac{1}{4}I & \\ & & & \frac{1}{2}I\end{pmatrix}
$$

$$
\times\begin{pmatrix} I & R_1 & R_2 & R_3\\ 0 & L_1 & L_2 & L_3\\ 0 & 0 & I & M\\ 0 & 0 & 0 & I\end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} I & R_1 & R_2 & R_3\\ R_1' & R_1'R_1+2L_1'L_1 & R_1'R_2+2L_1'L_2 & R_1'R_3+2L_1'L_3\\ R_2' & R_2'R_1+2L_2'L_1 & R_2R_2'+2L_2'L_2+I & R_2'R_3+aL_2'L_3+M\\ R_3' & R_3'R_2+2L_3'L_1 & R_3'R_2+2L_3'L_2+M' & R_3'R_3+L_3'L_3+M'M+2I\end{pmatrix}. \tag{5.3.58}
$$

由此可见$[H(\sigma)]^{-1}$的首 m 行与首 m 列元素皆是 a、b、k 的一次项，而其他元素最多是二次多项式. 令

$$
\tilde{u}=(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{k}), \tag{5.3.59}
$$

$$
h^{jk}(\sigma)=\sum_{p,q=1}^{mn}c^{pq}\frac{\mathrm{d}u^j\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}\tilde{u}^p\mathrm{d}\tilde{u}^q}, \tag{5.3.60}
$$

其中(c^{pq})为对角线方阵，对角线上的元素为$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{2}$. 此外，由(5.3.58)知

$$
h=\det H(\sigma)=2^{m(2n-m+1)}(\det L_1)^{-2}=2^{m(2n-m+1)}(\varphi_0)^2 \tag{5.3.61}
$$

是只包含$(u^1,\cdots,u^m)=(u_1,\cdots,u_m)$的函数，因为

$$
\varphi_0=\varphi_0(u_1,\cdots,u_m)=\exp\left[-\sum_{j=1}^{m}(m-j)u_j\right]. \tag{5.3.62}
$$

因此对于内切超圆坐标

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\sqrt{h}\,h^{jk}\frac{\partial f}{\partial u_k}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sqrt{h}\,h^{j\beta}\frac{\partial f}{\partial u^{\beta}}\right)$$

$$+\sum_{\alpha=m+1}^{mn}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}\left[h^{\alpha k}\frac{\partial f}{\partial u^{k}}\right]+\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}\left[h^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial u^{\beta}}\right].\tag{5.3.63}$$

在上式第二项中 $h^{j\beta}=h^{\beta j}$

$$(j=1,\cdots,m;\beta=m+1,\cdots,mn),$$

由(5.3.58)知是不包含 $u_1,\cdots,u_m$ 的. 故

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\sqrt{h}\,h^{j\beta}\frac{\partial f}{\partial u^{\beta}}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=m+1}^{mn}\left[\frac{1}{\varphi_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}h^{j\beta}\frac{\partial f}{\partial u^{\beta}}+h^{j\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u^{\beta}}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=m+1}^{mn}\left\{-(m-j)\left[-\frac{\partial h^{j\beta}}{\partial u^{\beta}}f+\frac{\partial(h^{j\beta}f)}{\partial u^{\beta}}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial h^{j\beta}}{\partial u^{\beta}}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_j}+\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\left(h^{j\beta}\frac{\partial f}{\partial u_j}\right)\right\}.\tag{5.3.64}$$

根据(5.3.60)、(5.3.55)、(5.3.41)、(5.3.46)、(5.3.50),知

$$\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial h^{j\beta}}{\partial u^{\beta}}=\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{mn}c^{\lambda\mu}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}\tilde{u}^{\lambda}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial\tilde{u}^{\mu}}\right)$$

$$=\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}\tilde{a}_{ll}}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{ll}}\right)$$

$$=\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jj}}\right)$$

$$=\sum_{p<q}\frac{\partial}{\partial a_{pq}}\left(\frac{\mathrm{d}a_{pq}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jj}}\right)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n-m}\frac{\partial}{\partial b_{p\beta}}\left(\frac{\mathrm{d}b_{p\beta}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jj}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{p<q}\frac{\partial}{\partial k_{pq}}\left(\frac{\mathrm{d}k_{pq}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jj}}\right)\\
&=\sum_{p<q}\frac{\partial}{\partial a_{pq}}(\delta_{qj}a_{pq})-\sum_{p=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n-m}\frac{\partial}{\partial b_{p\beta}}(\delta_{jp}b_{p\beta})\\
&\quad-\sum_{p<q}\frac{\partial}{\partial k_{pq}}[(\delta_{jp}+\delta_{jq})k_{pq}]\\
&=(j-1)-(n-m)-(m-j)-(j-1)\\
&=-(n-j).
\end{aligned}
\tag{5.3.65}
$$

将上式代入(5.3.64),得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\sqrt{h}\,h^{j\beta}\frac{\partial f}{\partial u^{\beta}}\right]\\
&=\sum_{j=1}^{m}(n-j)\frac{\partial f}{\partial u_j}-\sum_{j=1}^{m}(m-j)(n-j)f\\
&\quad+\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\sum_{j=1}^{m}h^{j\beta}\left[\frac{\partial f}{\partial u_j}-(m-j)f\right].
\end{aligned}
\tag{5.3.66}
$$

将上式代入(5.3.63),并且利用

$$
\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\sqrt{h}\,h^{jk}\frac{\partial f}{\partial u_k}\right]&=\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u_j^2}+\frac{1}{\varphi_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_j}\frac{\partial f}{\partial u_j}\right]\\
&=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j^2}-\sum_{j=1}^{m}(m-j)\frac{\partial f}{\partial u_j},
\end{aligned}
\tag{5.3.67}
$$

得

$$
\begin{aligned}
\Delta f=&\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j^2}+(n-m)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}-c(m,n)f\\
&+\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}(M_\beta f),
\end{aligned}
\tag{5.3.68}
$$

其中

$$
c(m,n)=\sum_{j=1}^{m}(m-j)(n-j),
\tag{5.3.69}
$$

$$
M_\beta f=\sum_{j=1}^{m}h^{j\beta}\left[2\frac{\partial f}{\partial u_j}-(m-j)f\right]+\sum_{\alpha=m+1}^{mn}h^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial u^{\alpha}}.
\tag{5.3.70}
$$

定理5.3.2 在实典型域 $\mathfrak{R}_R(m,n)$ 中，不变度量(5.3.1)的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 对于内切超圆坐标 (A,B,K) 的独立参数设为 $u=(u^1,\cdots,u^{mn})$，其中 $(u^1,\cdots,u^m)=(u_1,\cdots,u_m)$ 使

$$A=\begin{pmatrix} e^{u_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{u_m} \end{pmatrix},$$

则不变度量可写为

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{j,k=1}^{mn}h_{jk}(u)\mathrm{d}u^j\mathrm{d}u^k,$$

其中

$$[H(\sigma)]^{-1}=(h^{jk})$$

是(5.3.58)的形式，而算子 Δ 对于内切超圆坐标为

$$\Delta f=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j^2}+(n-m)\frac{\partial f}{\partial u_j}-c(m,n)f$$

$$+\sum_{\alpha=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(M_\alpha f),$$

其中 $c(m,n)=\sum_{j=1}^{m}(m-j)(n-j)$,

$$M_\alpha f=\sum_{j=1}^{m}h^{j\alpha}\left[2\frac{\partial f}{\partial u_j}-(m-j)f\right]+\sum_{\beta=m+1}^{mn}h^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial u\beta}\ .$$

注意，在(5.3.68)中，$\sum_{\beta=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^\beta}(M_\beta f)$ 是 $(u^{m+1},\cdots,u^{mn})\in \mathrm{R}^{m(n-1)}$ 的全微分. 如果 $f=f(u)$ 当 $u_1,\cdots,u_m$ 固定时，已知 $h^{\alpha\beta}$ 最多是 u 的二次多项式，若

$$f(u)=O\left(\frac{1}{[(u^{m+1})^2+\cdots+(u^{mn})^2]^{mn-m+1}}\right),$$

则由 Stokes 公式可知

$$\int_{\mathrm{R}^{mn-m}}\sum_{\alpha=m+1}^{mn}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(M_\alpha f)\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}=0. \qquad (5.3.71)$$

根据定理5.3.2，$\mathfrak{R}_R(m,n)$ 不变度量的 Laplace-Beltrami 算子对内切超圆坐标能够分解为两部分：

$$\Delta = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}, \tag{5.3.72}$$

其中

$$\mathfrak{L}_0 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + (n-m)\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_j} - c(m,n) \tag{5.3.73}$$

是一个常系数椭圆型二阶微分算子；

$$\mathfrak{L} = \sum_{j=m+1}^{mn} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} M_{\alpha} \tag{5.3.74}$$

是变数 $u^{m+1},\cdots,u^{mn}$的全微分算子.

实际上,$\mathfrak{L}_0$又可写为

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 + \cdots + \mathfrak{L}_m, \tag{5.3.75}$$

其中

$$\mathfrak{L}_j = \frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + (n-m)\frac{\partial}{\partial u_j} - \frac{1}{m}c(m,n). \tag{5.3.76}$$

在热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (n-m)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m}c(m,n)f \tag{5.3.77}$$

中,令

$$f = f(x,t) = e^{-\frac{c_1}{m}t} e^{-\frac{1}{2}(n-m)x} f_0(x,t), \tag{5.3.78}$$

其中

$$c_1 = c_1(m,n) = c(m,n) + \frac{m}{4}(n-m)^2, \tag{5.3.79}$$

则方程化为

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}. \tag{5.3.80}$$

熟知,此 R 中的热方程的热核为

$$f_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{4t}x^2}. \tag{5.3.81}$$

引理5.3.3　热方程$\frac{\partial f}{\partial t}=\mathfrak{L}_0 f$ 的热核为

$$h_0(u_1,\cdots,u_m,t) = e^{-c_1(m,n)t} e^{-\frac{1}{2}(n-m)(u_1+\cdots+u_m)} \times \prod_{j=1}^{m} f_0(u_j,t).$$

§5.4 积分变换

设 $Y=(Y_1,Y_2)\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$, $m\leqslant n$. 根据(5.1.21)及(5.1.26),有

$$
\begin{aligned}
&(I-YY')^{-1}\\
&=\frac{1}{4}(I+X_1')\left(\frac{X_1+X_1'}{2}-X_2X_2'\right)^{-1}(I+X_1)\\
&=\frac{1}{4}[I+A'(I+BB'-K)A](A'A)^{-1}\\
&\quad\times[I+A'(I+BB'+K)A]\\
&=\frac{1}{4}[A^{-1}+A'+A'(BB'-K)]\\
&\quad\times[A+A'^{-1}+(BB'+K)A]. \qquad (5.4.1)
\end{aligned}
$$

引理5.4.1 设 $f(Y)$ 是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$ 的函数,它在原点的固定子群下不变,即

$$f(Y)=f(UYV),\ U\in O(m),\ V\in O(n)$$

必是 $(I-YY')^{-1}$ 的函数,即可写为

$$
f(Y)=f_1\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}[A^{-1}+A'+A'(BB'-K)]\\ \times[A+A'^{-1}+(BB'+K)A]\end{array}\right),
$$

其中 (A,B,K) 为 Y 点的内切超圆坐标.

证 记 $Y=U(\Lambda,0)V$,

$$
\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix},\ \lambda_1,\cdots,\lambda_m\text{ 为非负的.}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\Lambda&=[\Lambda^2]^{\frac{1}{2}}\\
&=[I-(I-\Lambda^2)]^{\frac{1}{2}}\\
&=\{(I-\Lambda^2)[(I-\Lambda^2)^{-1}-I]\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= \{[(I-\Lambda^2)^{-1}-I]^{-1}(I-\Lambda^2)^{-1}\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= U'\{[(I-YY')^{-1}-I]^{-1}(I-YY')^{-1}\}^{-\frac{1}{2}}U,$$

及

$$(\Lambda,0) = U'(\{[(I-YY')^{-1}-I]^{-1}$$

$$\times (I-YY')^{-1}\}^{-\frac{1}{2}},0)\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

因此

$$f(Y) = f(\Lambda,0)$$

$$= f(\{[(I-YY')^{-1}]^{-1}(I-YY')^{-1}\}^{-\frac{1}{2}},0).$$

令上式为 $f_1((I-YY')^{-1})$. 应用(5.4.1),即得引理. ▌

现考虑 $\mathfrak{R}_R(m,n)$的热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f, \tag{5.4.2}$$

其中 $f=f(Y,t)$, $Y\in\mathfrak{R}_R(m,n)$, $t\in R_+$. R_+即区间$(0,\infty)$,亦即 $t>0$. 函数

$$H(X,Y,t) \quad ((X,Y,t)\in\mathfrak{R}_R\times\mathfrak{R}_R\times R_+) \tag{5.4.3}$$

称为热方程(5.4.2)的热核,若它适合

(i) $\dfrac{\partial H}{\partial t}=\Delta_X H$, $H(X,Y,t)=H(Y,X,t)$;

(ii) 对任一在 $\mathfrak{R}_R(m,n)$连续并有界的函数 $\varphi_0(Y)$,有

$$\lim_{t\to 0}\int_{Y\in\mathfrak{R}_R(m,n)}\varphi_0(Y)H(X,Y,t)\dot{Y} = \varphi_0(X),$$

其中 $\dot{Y}$是不变度量(5.3.1)的体积元素.

体积元素 $\dot{Y}$显然是在变换(5.2.6)下不变的,因此自然地要求 $H(X,Y,t)$不变,即

$$H(\tau(X),\tau(Y),t) = H(X,Y,t), \tag{5.4.4}$$

其中 $\tilde{X}=\tau(X)$表示(5.2.6)的变换. 我们选取 $\tau=\tau_Y$,这是(5.2.6)中把 Y 点映为原点的变换,则有

$$H(X,Y,t) = H(\tau_Y(X),0,t). \tag{5.4.5}$$

这就是说,我们求热核,只须求 $H(X,0,t)$适合热方程,并且对任一在 $\mathfrak{R}_R$ 连续有界的函数 $\varphi_0(X)$有

$$\lim_{t\to 0}\int_{Y\in\Re_R(m,n)}\varphi_0(X)H(X,0,t)\dot{X}=\varphi_0(0),\qquad(5.4.6)$$

则 $H(X,Y,t)=H(\tau_Y(X),0,t)$便是热核.

由于矩阵 $\tau_Y(X)$可写为

$$\tau_Y(X)=U(\Lambda,0)V,\qquad(5.4.7)$$

其中正交方阵 U 与 V 的元素显然是 X 与 Y 的函数,Λ 亦然,即

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1(X,Y) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(X,Y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{th} r_1(X,Y) & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{th} r_m(X,Y)\end{pmatrix},\qquad(5.4.8)$$

其中

$$r(X,Y)=\{[r_1(X,Y)]^2+\cdots+[r_m(X,Y)]^2\}^{\frac{1}{2}}\qquad(5.4.9)$$

是 X 到 Y 的测地距离.由于 $H(X,Y,t)$特别是在(5.2.6)中使原点不变的固定分群下不变,因此有

$$H(X,Y,t)=H((\Lambda,0),0,t)\qquad(5.4.10)$$

$$=h(r_1(X,Y),\cdots,r_m(X,Y),t),\qquad(5.4.11)$$

其中 h 对 $r_1,\cdots,r_m$ 是对称的,因为在(5.4.7)中可以选取 U 与 V,使得 Λ 的对角线上的元素可以随便调动.因此,我们只须求方程

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\Delta h\qquad(5.4.12)$$

的解 $h=h(r_1,\cdots,r_m,t)$是 $r_1,\cdots,r_m$ 的对称函数,其中

$$r_1=r_1(X,0),\cdots,r_m=r_m(X,0)\qquad(5.4.13)$$

是原点的伪测地坐标的径向部分,使得

$$H(X,0,t)=h(r_1(X,0),\cdots,r_m(X,0),t)\qquad(5.4.14)$$

适合条件(5.4.6),则 $h(r_1(X,Y),\cdots,r_m(X,Y),t)$便是热核.由于对任意实的正交方阵 U 与 V 有

$$h(r_1(UXV,0),\cdots,r_m(UXV,0),t)$$

$$= h(r_1(X,0),\cdots,r_m(X,0),t), \qquad (5.4.15)$$

根据引理5.4.1,h 能表为

$$h(r_1,\cdots,r_m,t) = h_1\Big(\frac{1}{4}[A^{-1} + A' + A'(BB' - K)] \times [A + A'^{-1} + (BB' + K)A],t\Big), \qquad (5.4.16)$$

其中(A,B,K)为 X 点的内切超圆坐标.因此可以求内切超圆坐标的热方程

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = \Delta h_1 = \mathfrak{L}_0 h_1 + \mathfrak{L} h_1 \qquad (5.4.17)$$

的解 h_1,使得由(5.4.15)定义的 $h(r_1,\cdots,r_m,t)$适合条件(5.4.6),便构造出热核了.这里 $\mathfrak{L}_0$与 $\mathfrak{L}$ 分别由(5.3.73)与(5.3.74)所定义.

设

$$h_1\Big(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + A'(BB' - K)] \times [A + A'^{-1} + (BB' + K)A],t\Big)$$

是热方程(5.4.12)的热核 $H(X,0,t)$的内切超圆坐标表示.令

$$h_0(u_1,\cdots,u_m,t) = \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\int_{(u^{m+1},\cdots,u^{mn})\in\mathrm{R}^{m(n-1)}} h_1\Big(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + A'(BB' - K)][A + A'^{-1} + (B'B' + K)A],t\Big) \times \mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}, \qquad (5.4.18)$$

并假定 h_1对 u 适合条件(5.3.71).注意,这里 $u=(u^1,\cdots,u^{mn})$是由(5.3.55)定义的.应用定理5.3.2及(5.3.71)知

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\int_{\mathrm{R}^{m(n-1)}} \frac{\partial h_1}{\partial t}\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}$$

$$= \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\int_{\mathrm{R}^{m(n-1)}}\Delta h_1 \mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}$$

$$= \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\int_{\mathrm{R}^{m(n-1)}}(\mathfrak{L}_0 h_1 + \mathfrak{L}h_1)\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}$$

$$= \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\int_{\mathrm{R}^{m(n-1)}}(\mathfrak{L}_0 h_1)\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}$$

$$= \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\mathfrak{L}_0\int_{\mathrm{R}^{m(n-1)}} h_1 \mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}$$

$$= \mathfrak{L}_0 h_0,$$

此即由(5.4.18)定义的 h_0必须适合上面的热方程. 根据引理5.3.3及下面的引理5.4.5,$h_0(u_1,\cdots,u_m,t)$必定是以下的形式

$$h_0(u_1,\cdots,u_m,t)$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{\pi^{mn-m}}e^{-c_1(m,n)t}\prod_{j=1}^{m}e^{-\frac{1}{2}(n-m)u_j}f_0(u_j,t). \quad (5.4.19)$$

现在是如何构造 h_1?这须应用下面的几个引理.

在此我们先说明一些符号的含义:设 $F(\rho)$是 ρ 的函数,r 为实数,$r\geqslant 0$,当 $\rho\geqslant 0$时,定义

$$[F(\rho)]_{\mathrm{ch}^2\rho=\mathrm{ch}^2 r+\tau^2} = [F(\rho)]_{\rho=\log\left(\sqrt{\mathrm{ch}^2 r+\tau^2}+\sqrt{\mathrm{ch}^2 r+\tau^2-1}\right)};$$

当 $\rho<0$时,定义

$$[F(\rho)]_{\mathrm{ch}^2\rho=\mathrm{ch}^2 r-\tau^2} = [F(\rho)]_{\rho=-\log\left(\sqrt{\mathrm{ch}^2 r+\tau^2}+\sqrt{\mathrm{ch}^2 r+\tau^2-1}\right)}.$$

引理5.4.2 设 $f(\rho,\sigma,v)$是$(\rho,\sigma)\in\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}$ 的可微分函数,$v=(v_1,\cdots,v_q)\in\mathfrak{D}$,$\mathfrak{D}$ 是 R^q 中一个域. 若对每一个 $v\in\mathfrak{D}$ 有

$$\lim_{\rho^2+\sigma^2\to\infty}(\rho^2+\sigma^2)^{1+\varepsilon}|f| = \lim_{\rho^2+\sigma^2\to\infty}(\rho^2+\sigma^2)^{1+\varepsilon}\left|\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right| = 0,$$

其中 ε 是一正数,则

$$f(r,0,v)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{sh}2\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\rho,\sigma,v)\mathrm{d}\sigma\right]_{\mathrm{ch}^2\rho=\mathrm{ch}^2 r+\tau^2}\mathrm{d}\tau.$$

证 实际上,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}2\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\rho,\sigma,v)\mathrm{d}\sigma\right]_{\operatorname{ch}^2\rho=\operatorname{ch}^2r+\tau^2}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\operatorname{ch}^2\rho}f\left(\log\left[\sqrt{\operatorname{ch}^2\rho}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{\operatorname{ch}^2\rho-1}\right],\sigma,v\right)\right]_{\operatorname{ch}^2\rho=\operatorname{ch}^2r+\tau^2}\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial(\operatorname{ch}^2\rho+\sigma^2)}f\left(\log\left[\sqrt{(\operatorname{ch}^2\rho+\sigma^2)-\sigma^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{(\operatorname{ch}^2\rho+\sigma^2)-\sigma^2-1}\right],\sigma,v\right)\right]_{\operatorname{ch}^2\rho+\sigma^2=\operatorname{ch}^2r+\sigma^2+\tau^2}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}f\left(\log\left[\sqrt{\xi-\sigma^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{\xi-\sigma^2-1}\right],\sigma,v\right)\right]_{\xi=\operatorname{ch}^2r+\sigma^2+\tau^2}\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau.$$

把上式两端乘以 $-1/\pi$ 之后用极坐标 $\sigma=\eta\sin\theta,\tau=\eta\cos\theta$ 得到

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}2\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\rho,\sigma,v)\mathrm{d}\sigma\right]_{\operatorname{ch}^2\rho=\operatorname{ch}^2r+\sigma^2+\tau^2}\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}f\left(\log\left[\sqrt{\xi-\eta^2\cos^2\theta}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{\xi-\eta^2\cos^2\theta-1}\right],\eta\cos^2\theta,v\right)\right]_{\xi=\operatorname{ch}^2r+\eta^2}\eta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial(\eta^2+\operatorname{ch}^2r)}$$

$$\times f\left(\log\left[\sqrt{\eta^2+\operatorname{ch}^2r-\eta^2\cos^2\theta}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\eta^2+\operatorname{ch}^2r-\eta^2\cos^2\theta-1}\right],\sqrt{\eta^2}\cos\theta,v\right)\mathrm{d}\eta^2\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{ch}^2r}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\zeta}f\left(\log\left[\sqrt{\zeta-(\zeta-\operatorname{ch}^2r)\cos^2\theta}\right.\right.$$

$$+\sqrt{\zeta-(\zeta-\mathrm{ch}^2 r)\cos^2\theta-1}\big], \sqrt{\zeta-\mathrm{ch}^2 r}\cos\theta, v\Big)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\log\left[\sqrt{\mathrm{ch}^2 r}+\sqrt{\mathrm{ch}^2 r-1}\right], 0, v\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=f(r,0,v).$$

引理证毕. ▌

若令

$$\hat{f}(\rho,v)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho,\sigma,v)\mathrm{d}\sigma, \tag{5.4.20}$$

并定义算子

$$T_r g(r,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[D_\rho g(\rho,v)\right]_{\mathrm{ch}^2\rho=\mathrm{ch}^2 r+\tau^2}\mathrm{d}\tau, \tag{5.4.21}$$

其中

$$D_\rho=-\frac{1}{\mathrm{sh}2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}, \tag{5.4.22}$$

则引理5.4.2中当 $f(\rho,\sigma,v)$ 适合引理条件时,

$$T_r\hat{f}(r,v)=f(r,0,v). \tag{5.4.23}$$

更一般的,设函数 $f(\sigma,y,v)$, $\sigma\in\mathrm{R}_+$, $y=(y_1,\cdots,y_p)\in\mathrm{R}^p$, $v=(v_1,\cdots,v_q)\in\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ 是 R^q 的域, v 作为参数,对 σ 与 y 有 p 次连续偏微分,并适合条件

$$\lim_{\rho+|y|^2\to\infty}(\rho^2+|y|^2)^{p+\epsilon}\left|\frac{\partial^{r+s}f}{\partial\rho^r\partial y_{j_1}\cdots\partial y_{j_s}}\right|=0,$$

$$r+s=0,1,\cdots,p;\quad j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,p;$$

$$|y|=\left[y_1^2+\cdots+y_p^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.4.24}$$

令

$$\hat{f}(\sigma,v)=\frac{1}{\pi^p}\int_{\mathrm{R}^p} f(\sigma,y,v)\dot{y},\quad \dot{y}=\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_p, \tag{5.4.25}$$

定义算子 T_r^p 作用于 $\hat{f}(\sigma,v)$,即为

$$T^p\hat{f}(\sigma,v)=T_r^{p-1}\left[T_r\hat{f}(r,v)\right],\text{当 } p\geqslant 2. \tag{5.4.26}$$

引理5.4.3 设 $f(\rho,y,v)$ 适合条件(5.4.24),则

$$T_r^p \hat{f}(r,v) = f(r,0,v).$$

证 当 $p=1$时,此引理即是引理5.4.2.当 $p\geqslant 2$时,根据定义

$$T_r^p \hat{f}(r,v) = T_r^{p-1}[T_r \hat{f}(r,v)],$$

令

$$f_{p-1}(\sigma,y_p,v) = \frac{1}{\pi^{p-1}}\int_{\mathrm{R}^{p-1}} f(\sigma,y_1,\cdots,y_p,v)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{p-1} \tag{5.4.27}$$

及 $$\hat{f}_{p-1}(\sigma,y_p,v) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{R}} f_{p-1}(\sigma,y_p,v)\mathrm{d}y_p.$$

则应用(5.4.23),得

$$\begin{aligned} & T_r^p \hat{f}(r,v) \\ & = T_r^{p-1} f_{p-1}(r,0,v) \\ & = T_r^{p-1}\left[\frac{1}{\pi^{p-1}}\int_{\mathrm{R}^{p-1}} f(\sigma,y_1,\cdots,y_{p-1},0,v)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{p-1}\right]. \end{aligned}$$

由于 $f_{p-1}(\sigma,0,v)$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{\pi^{p-1}}\int_{\mathrm{R}^{p-1}} f(\sigma,y_1,\cdots,y_{p-1},0,v)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{p-1} \\ & = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{R}}\left[\frac{1}{\pi^{p-2}}\int_{\mathrm{R}^{p-2}} f(\sigma,y_1,\cdots,y_{p-1},0,v)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{p-2}\right]\mathrm{d}y_{p-1} \\ & = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{R}} f_{p-2}(\sigma,y_{p-1},v)\mathrm{d}y_{p-1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & f_{p-2}(\sigma,y_{p-1},v) \\ & \qquad = \frac{1}{\pi^{p-2}}\int_{\mathrm{R}^{p-2}} f(\sigma,y_1,\cdots,y_{p-1},0,v)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{p-2}. \end{aligned}$$

因此

$$f_{p-1}(\sigma,0,v) = \hat{f}_{p-2}(\sigma,v) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{R}} f_{p-2}(\sigma,y_{p-1},v)\mathrm{d}y_{p-1}.$$

再应用(5.4.23)得出

$$\begin{aligned} & T_r^p \hat{f}(r,v) \\ & = T_r^{p-2} f_{p-2}(\sigma,0,v) \end{aligned}$$

$$= T_r^{p-2}\left[\frac{1}{\pi^{p-2}}\int_{\mathrm{R}^{p-2}} f(r,y_1,\cdots,y_{p-2},0,0,v)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{p-2}\right].$$

如果 $p-2>0$,可继续此法,最后得出

$$T_r^p \hat{f}(r,v) = f(r,0,v).$$

引理得到证明. ▌

现在应用引理5.4.3于以矩阵 X 为变数的函数 $f(X)$, $f(X)$ 即以 $X=(x_{j\alpha})$ 的元素 $x_{j\alpha}$ 为变数的函数. 因此函数

$$f\left(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + A'(BB' - K)] \times [A + A'^{-1} + (BB' + K)A], t\right) \quad (5.4.28)$$

当 $t\in\mathrm{R}_+$, (A,B,K) 是内切超圆坐标时,这是 t 与 $u=(u^1,\cdots,u^{mn})$ 的函数, u 由(5.3.55)定义. 注意, $u^1=u_1,\cdots,u^m=u_m$,而 $e^{u_1},\cdots,e^{u_m}$ 是 A 的对角线上的元素,即是

$$A = \begin{pmatrix} e^{u_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{u_m} \end{pmatrix} = \Lambda + \Gamma, \quad (5.4.29)$$

式中 Λ 是对角线方阵;

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4.30)$$

$$\dot{\Gamma} = \prod_{j<k} \mathrm{d}a_{jk} = \mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{\frac{1}{2}m(m+1)}. \quad (5.4.31)$$

令 $B=(b_{j\alpha})$,

$$\dot{B} = \prod_{j=1}^{m}\prod_{\alpha=1}^{n-m} \mathrm{d}b_{j\alpha} = \mathrm{d}u^{\frac{1}{2}m(m+1)+1}\cdots\mathrm{d}u^{\frac{1}{2}m(m+1)+m(n-m)}. \quad (5.4.32)$$

令 $K=(k_{jk})=-K'$,

$$\dot{K} = \prod_{j<k} \mathrm{d}k_{jk} = \mathrm{d}u^{\frac{1}{2}m(m+1)+m(n-m)+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}. \quad (5.4.33)$$

因此有

$$\dot{\Gamma}\,\dot{B}\,\dot{K}=\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}. \tag{5.4.34}$$

而(5.4.18)可写为

$$\begin{aligned}h_0(u_1,\cdots,u_m,t)=\frac{1}{\pi^{mn-m}}\int_{\mathrm{R}^{mn-m}}h_1\Big(\frac{1}{4}[A'+A^{-1}\\+A'(BB'-K)][A+A'^{-1}\\+(BB'+K)A],t\Big)\dot{\Gamma}\,\dot{B}\,\dot{K}.\end{aligned} \tag{5.4.35}$$

现在假定(5.4.28)定义的函数 f 当 $t\in\mathrm{R}_+$ 时，$u=(u^1,\cdots,u^{mn})$ 有 mn 次连续的偏微分，并适合条件

$$\begin{aligned}&\lim_{|u|\to\infty}|u|^{2mn+\varepsilon}\left|\frac{\partial^s f}{\partial u^{j_1}\cdots\partial u^{j_s}}\right|=0,\\&j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,mn;\\&s=0,1,\cdots,mn,\ |u|=[(u^1)^2+\cdots+(u^{mn})^2]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{5.4.36}$$

记

$$A=\begin{pmatrix}e^{u_1} & a_1\\ 0 & A_1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\ B_1\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0 & k_1\\ -k_1' & K_1\end{pmatrix},$$

$$A_1=\Lambda_1+\Gamma_1,\ \Lambda_1=\begin{pmatrix}e^{u_2} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{u_{m-1}}\end{pmatrix}, \tag{5.4.37}$$

其中

$$\begin{aligned}&a_1=(a_{12},\cdots,a_{1m}),\ b_1=(b_{11},\cdots,b_{1,n-m}),\\&k_1=(k_{12},\cdots,k_{1m}).\end{aligned} \tag{5.4.38}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\dot{\Gamma}=\dot{a}_1\dot{\Gamma}_1,\ \dot{a}_1=\mathrm{d}a_{12}\cdots\mathrm{d}a_{1m};\\&\dot{B}=\dot{b}_1\dot{B}_1,\ \dot{b}_1=\mathrm{d}b_{11}\cdots\mathrm{d}b_{1,n-m};\\&\dot{K}=\dot{k}_1\dot{B}_1,\ \dot{k}_1=\mathrm{d}k_{12}\cdots\mathrm{d}k_{1m}.\end{aligned} \tag{5.4.39}$$

令

$\hat{f}\,(u_1,\cdots,u_m,t)$

$$= \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\int_{\mathrm{R}^{m(n-1)}} f\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{mn}$$

$$= \frac{1}{\pi^{m(n-1)}}\int_{\mathrm{R}^{m(n-1)}} f\Big(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + A'(BB' - K)]$$

$$\times [A + A'^{-1} + (BB' + K)A], t\Big)\dot{\Gamma}\,\dot{B}\,\dot{K}. \qquad (5.4.40)$$

引理5.4.4　设 f 适合条件(5.4.36)

$$T_{r_m}^{n-m}T_{r_{m-1}}^{n-m+2}\cdots T_{r_1}^{m+n-2}\hat{f}(r_1,\cdots,r_m,t)$$

$$= f\left(\begin{bmatrix}\mathrm{ch}^2 r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{ch}^2 r_m\end{bmatrix}, t\right).$$

证　根据(5.4.37)～(5.4.39)，把$\hat{f}$写为

$$\hat{f}(u_1,\cdots,u_m,t) = \frac{1}{\pi^{m+n-2}}\int_{\mathrm{R}^{m+n-2}}\left[\frac{1}{\pi^{(m-1)(n-2)}}\right.$$

$$\left.\times\int_{\mathrm{R}^{(m-1)(n-2)}} f\,\dot{\Gamma}_1\,\dot{B}_1\,\dot{K}_1\right]\dot{a}_1\dot{b}_1\dot{k}_1.$$

应用引理5.4.3知

$$T_{r_1}^{m+n-2}\hat{f}(r_1,r_2,\cdots,r_m t)$$

$$= \frac{1}{\pi^{(m-1)(n-2)}}\int_{\mathrm{R}^{(m-1)(n-2)}}[f]_{a_1=b_1=k_1=0,u_1=r_1}\dot{\Gamma}_1\,\dot{B}_1\,\dot{K}_1,$$

其中

$$[f]_{a_1=b_1=k_1=0,u_1=r_1}$$

$$= f\left(\begin{bmatrix}\mathrm{ch}^2 r_1 & 0 \\ 0 & \begin{matrix}\frac{1}{4}[A_1' + A_1^{-1} + A_1'(B_1B_1' - K_1)] \\ \times [A_1 + A_1'^{-1} + (B_1B_1' + K_1)A_1]\end{matrix}\end{bmatrix}, t\right).$$

这里(A_1, B_1, K_1)是实典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m-1,n-1)$的内切超圆坐标.重复应用引理5.4.3便得

$$T_{r_m}^{n-m}T_{r_{m-1}}^{n-m+2}\cdots T_{r_1}^{m+n-2}\hat{f}(r_1,\cdots,r_m,t)$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} \mathrm{ch}^2 r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{ch}^2 r_m \end{bmatrix}, t\right).$$

引理得到证明. ▍

引理5.4.5 如果 $h_1\left(\frac{1}{4}[A' + A'^{-1} + A'(BB' - K)]\times[A + A'^{-1} + (BB' + K)A], t\right)$ 是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$ 的热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

的热核 $H(X,0,t)$ 的内切超圆坐标表示,则

$$h_0(u_1,\cdots,u_m,t) = \frac{1}{\pi^{mn-m}}\int_{\mathrm{R}^{mn-m}} h_1\left(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + A'(BB' - K)][A + A'^{-1} + (BB' + K)A], t\right)\dot{\Gamma}\,\dot{B}\,\dot{K}$$

必定是以下的形式:

$$h_0(u_1,\cdots,u_m,t) = \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{\pi^{mn-m}}\frac{1}{(\sqrt{\pi}\,t)^m}\times e^{-c_1 t}\exp\left[-\frac{1}{4t}\sum_{j=1}^m u_j^2 - \frac{1}{2}(n-m)\sum_{j=1}^m u_j\right],$$

其中 $$c_1 = \sum_{j=1}^m (m-j)(n-j) + \frac{1}{4}m(n-m)^2.$$

证 实际上,由(5.3.72)有

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_0}{\partial t} &= \frac{1}{\pi^{mn-m}}\int_{\mathrm{R}^{mn-m}}\frac{\partial h_1}{\partial t}\dot{\Gamma}\,\dot{B}\,\dot{K}\\ &= \frac{1}{\pi^{mn-m}}\int_{\mathrm{R}^{mn-m}}\Delta h_1\,\dot{\Gamma}\,\dot{B}\,\dot{K}\\ &= \frac{1}{\pi^{mn-m}}\int_{\mathrm{R}^{mn-m}}(\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L})h_1\,\dot{\Gamma}\,\dot{B}\,\dot{K}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^{mn-m}}\int_{\mathrm{R}^{mn-m}} \mathfrak{L}_0 h_1 \dot{\Gamma} \dot{B} \dot{K} = \mathfrak{L}_0 h_0,$$

可知 h_0 适合方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathfrak{L}_0 f.$$

由于(5.3.58)、(5.3.61)及(5.3.44)知，$\mathfrak{R}_R(m,n)$ 的不变度量 $\frac{1}{4}\mathrm{d}s^2$ 的体积元素的内切超圆坐标表示为

$$\dot{X} = 2^{-\frac{1}{2}m(m-1)}\varphi_0(u_1,\cdots,u_m)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{mn},$$

其中

$$\varphi_0 = \exp\left[-\sum_{j=1}^{m}(m-j)u_j\right].$$

由于 h_1 是热核，对任一在 R^m 连续并有界的函数 $\varphi(u_1,\cdots,u_m)$ 有

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathrm{R}^m} 2^{-\frac{1}{2}m(m-1)}\varphi\varphi_0 h_0(u_1,\cdots,u_m,t)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_m$$

$$= \lim_{t\to +0}\frac{1}{\pi^{mn-m}}\int_{\mathrm{R}^{mn}}\varphi(u_1,\cdots,u_m)h_1\dot{X}$$

$$= \frac{1}{\pi^{mn-m}}\varphi(0).$$

定义算子

$$\mathfrak{L}_1 = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + 2\sum_{j=1}^{m}a_j\frac{\partial}{\partial u_j},$$

其中

$$a_j = m - j + \frac{1}{2}(n-m) \quad (j = 1,\cdots,m).$$

由计算可知，热方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_0 f) = \mathfrak{L}_1(\varphi_0 f)$$

当取 $f=f_m$ 是引理5.3.3中的函数时，则 $\varphi_0 f_m$ 适合上面的热方程. 由上面积分的极限知，$2^{-\frac{1}{2}m(m-1)}\pi^{mn-m}\varphi_0 f_m$ 是上面热方程的热核，这是唯一决定的. 从而证明了引理. ▌

应用此引理于(5.4.35)，由引理5.4.4得出

$$T_{r_m}^{n-m}T_{r_{m-1}}^{n-m+2}\cdots T_{r_1}^{m+n-2}h_0(r_1,\cdots,r_m,t)$$

$$=h_1\left(\begin{bmatrix}\mathrm{ch}^2 r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{ch}^2 r_m\end{bmatrix},t\right).$$

我们把$(r_1,\cdots,r_m)$换为$(r_{j_1},\cdots,r_{j_m})$，其中$(j_1,\cdots,j_m)$是$(1,\cdots,m)$的一个排列，注意由(5.4.19)知$h_0(r_1,\cdots,r_m,t)$是$(r_1,\cdots,r_m)$的对称函数，故有

$$\frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}T_{r_{j_m}}^{n-m}T_{r_{j_{m-1}}}^{n-m+2}\cdots T_{r_{j_1}}^{m+n-2}h_0(r_1,\cdots,r_m,t)$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}h_1\left(\begin{bmatrix}\mathrm{ch}^2 r_{j_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{ch}^2 r_{j_m}\end{bmatrix},t\right),\quad (5.4.41)$$

其中$(j_1,\cdots,j_m)$过$(1,\cdots,m)$所有不同的排列，取

$$r_1=r_1(X,0),\cdots,r_m=r_m(X,0)\qquad (5.4.42)$$

为$X\in\mathfrak{R}_R(m,n)$的伪测地线坐标的径向部分. 如果U与V分别为m阶与n阶实正交方阵，则有

$$(r_1(UXV,0),\cdots,r_m(UXV,0))=(r_{j_1}(X,0),\cdots,r_{j_m}(X,0)),$$

(5.4.43)

其中$(j_1,\cdots,j_m)$是$(1,\cdots,m)$的一个排列. h_1假定为热核，必须

$$h_1\left(\begin{bmatrix}\mathrm{ch}^2 r_{j_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{ch}^2 r_{j_m}\end{bmatrix},t\right)$$

$$=h_1\left(\begin{bmatrix}\mathrm{ch}^2 r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{ch}^2 r_m\end{bmatrix},t\right).\qquad (5.4.44)$$

现令 $h(r_1(X,0),\cdots,r_m(X,0),t)$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}T_{r_{j_m}}^{n-m}T_{r_{j_{m-1}}}^{n-m+2}\cdots T_{r_{j_1}}^{n+m-2}h_0(r_1,\cdots,r_m,t).$$

(5.4.45)

由(5.4.45)构造的函数 $h(r_1(X,0),\cdots,r_m(X,0),t)$ 显然是 $r_1,\cdots,r_m$ 的对称函数，因此把 X 换为 UXV 时，根据(5.4.43)，h 是不变的，应用(5.3.15)的 Laplace-Beltrami 算子的伪测地线坐标表示

$$\Delta h = \Delta_X h = \frac{1}{\omega_0(r_1,\cdots,r_m)} \times \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mathrm{sh}^{n-m} r_j} \frac{\partial}{\partial r_j}\left[\omega_0(r_1,\cdots,r_m)\mathrm{sh}^{n-m} r_j \frac{\partial h}{\partial r_j}\right] \quad (5.4.46)$$

也是 $r_1,\cdots,r_m$ 的对称函数，同样能表达为(5.4.28)的形式.

我们的目的是要证明如此构造的 h 除以一个适当的正数之后，是热方程(5.4.2)的热核 $H(X,0,t)$. 为此首先要证明 h 适合此方程.

定理5.4.6　如 $h_0(u_1,\cdots,u_m,t)$ 是由(5.4.19)定义的；而 $h(r_1(X,0),\cdots,r_m(X,0),t)$ 是由(5.4.45)定义的. 则 h 适合方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h,$$

其中 Δ 为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$ 的不变度量(5.3.1)的 Laplace-Beltrami 算子.

证　根据引理5.3.3知

$$\frac{\partial}{\partial t} h_0(u_1,\cdots,u_m,t) = \mathfrak{L}_0 h_0(u_1,\cdots,u_m,t). \quad (5.4.47)$$

由(5.4.35)并应用(5.3.71)，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_0(u_1,\cdots,u_m,t)}{\partial t}\\
&= \frac{1}{\pi^{mn-m}} \int_{\mathrm{R}^{mn-m}} \frac{\partial h_1}{\partial t} \dot{\Gamma} \dot{B} \dot{K}\\
&= \mathfrak{L}_0 h_0(u_1,\cdots,u_m,t)\\
&= \frac{1}{\pi^{mn-m}} \int_{\mathrm{R}^{mn-m}} (\mathfrak{L}_0 h_1) \dot{\Gamma} \dot{B} \dot{K}\\
&= \frac{1}{\pi^{mn-m}} \int_{\mathrm{R}^{mn-m}} (\mathfrak{L}_0 h_1 + \mathfrak{L} h_1) \dot{\Gamma} \dot{B} \dot{K}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^{mn-m}} \int_{R^{mn-m}} \Delta h_1 \dot{\Gamma} \dot{B} \dot{K} \qquad (5.4.48)$$

令 $f = \Delta h_1$，及

$$\hat{f}(u_1, \cdots, u_m, t) = \frac{1}{\pi^{mn-m}} \int_{R^{mn-m}} f \dot{\Gamma} \dot{B} \dot{K},$$

应用引理5.4.4知

$$\frac{\partial}{\partial t} h(r_1, \cdots, r_m, t)$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{(j_1, \cdots, j_m)} T_{r_{j_m}}^{n-m} T_{r_{j_{m-1}}}^{n-m+2} \cdots T_{r_{j_1}}^{n+m-2}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial t} h_0(r_1, \cdots, r_m, t)$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{(j_1, \cdots, j_m)} \Delta h_1 \left(\begin{pmatrix} \mathrm{ch}^2 r_{j_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{ch}^2 r_{j_m} \end{pmatrix}, t \right)$$

$$= \Delta h(r_1, \cdots, r_m, t).$$

定理得到证明. ▌

现令

$$H(X, Y, t) = \frac{1}{c(\mathfrak{R}_R)} h(r_1(X, Y), \cdots, r_m(X, Y), t), \qquad (5.4.49)$$

其中 $c(\mathfrak{R}_R)$ 是一个适当的常数. 由于任一个(5.2.6)的变换 τ，使 $r_1(\tau X, \tau Y), \cdots, r_m(\tau X, \tau Y)$ 与 $r_1(X, Y), \cdots, r_m(X, Y)$ 只差一个次序的排列，而 h 是 $r_1, \cdots, r_m$ 的对称函数，因此有

$$H(\tau X, \tau Y, t) = H(X, Y, t). \qquad (5.4.50)$$

注意，这里

$$r_j(X, Y) = r_j(\tau_Y(X), 0), \; j = 1, \cdots, m.$$

§ 5.5　$\mathfrak{R}_R(m,n)$的热核

由(5.4.49)定义的函数 $H(X, Y, t)$ $((X, Y, t) \in \mathfrak{R}_R \times \mathfrak{R}_R \times R_+)$，已知其适合热方程(5.4.2). 要证明其为热核，需要证明可以

选取常数 $c=c(\mathfrak{R}_{\mathrm{R}})$，使任给的在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$ 连续有界的函数 $\varphi(X)$ 必有

$$\lim_{t\to 0}\int_{X\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}\varphi(X)H(X,Y,t)\dot{X}=\varphi(Y),\qquad(5.5.1)$$

其中 $\dot{X}$ 是不变体积元素. 在上节已证明，只要证明对任意的连续有界的函数 $\varphi(X)$ 有

$$\lim_{t\to 0}\int_{X\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}\varphi(X)H(X,0,t)\dot{X}=\varphi(0)\qquad(5.5.2)$$

成立，则(5.5.1)便成立. 如上式成立，特别取 $\varphi(X)\equiv 1$，必定有

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}}H(X,0,t)\dot{X}=1.\qquad(5.5.3)$$

要证上式，由(5.4.45)知，即要证以下定理：

定理5.5.1

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}h(r_1(X,0),\cdots,r_m(X,0),t)\,\dot{X}=c(\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n))$$

是一个正数.

证　根据(5.3.10)、(5.3.11)及(5.4.45)、(5.4.19)知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}h(r_1,\cdots,r_m,t)\dot{X}\\&=\frac{1}{\pi^{mn-m}}\cdot\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{(\sqrt{\pi t})^m}e^{-c_1(m,n)t}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}|\omega_0(r_1,\cdots,r_m)|\\&\quad\times\prod_{j=1}^{m}\mathrm{sh}^{n-m}r_j\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}\prod_{k=1}^{m}T_{r_{j_k}}^{n-m+2(j_k-1)}f_1(r_{j_k},t)\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_m\\&\quad\times\int\psi_0(\theta)\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{mn-m},\end{aligned}\qquad(5.5.4)$$

其中　$$f_1(r,t)=e^{-\frac{1}{4t}r^2-c_0r},\quad c_0=\frac{1}{2}(n-m).$$

$$
\begin{aligned}
&= T_r^{k-1}\left[-\int_r^{\infty}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\left(e^{-\frac{\sigma_1^2}{4t}-c_0\sigma_1}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\sigma_1-\mathrm{sh}^2 r}}\right] \\
&= \int_r^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial\sigma_k}\right)\int_{\sigma_k}^{\infty}\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)\int_{\sigma_2}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right) \\
&\quad\times e^{-\frac{\sigma_1^2}{4t}-c\sigma_1}\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\sigma_1-\mathrm{sh}^2\sigma_2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_2}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\sigma_2-\mathrm{sh}^2\sigma_3}}\cdots \\
&\quad\times\frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\sigma_k-\mathrm{sh}^2 r}}.
\end{aligned}
$$

令　　$\sigma_1 = 2\sqrt{t}\,r_1,\ \sigma_2 = 2\sqrt{t}\,r_2,\cdots,\ \sigma_k = 2\sqrt{t}\,r_k,$

得

$$
\begin{aligned}
&T_r^k\left(e^{-\frac{r^2}{4t}-cr}\right) \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{t})^k}\int_{\frac{r}{\sqrt{2t}}}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial r_k}\right)\int_{r_k}^{\infty}\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial r_2}\right)\int_{r_2}\left(-\frac{\partial}{\partial r_1}\right) \\
&\quad\times e^{-r_1^2-2\sqrt{t}\,c_0 r_1}\frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2\left(\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{t}\,r_1}{2\sqrt{t}\,r_1}\right)^2-r_2^2\left(\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{t}\,r_2}{2\sqrt{t}\,r_2}\right)^2}}\cdots \\
&\quad\times\frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2\left(\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{t}\,r_k}{2\sqrt{t}\,r_k}\right)^2-r^2\left(\frac{\mathrm{sh}\,r}{2\sqrt{t}\,r}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{t})^k}F_k(r,t).
\end{aligned}
\tag{5.5.5}
$$

作变换

$$
r_1 = 2\sqrt{t}\,s_1,\cdots,\ r_m = 2\sqrt{t}\,s_m,
$$

(5.5.4)成为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}h(r_1,\cdots,r_m,t)\dot{X} \\
&\quad= \frac{v(m,n)}{\pi^{mn-m}}\frac{1}{(\sqrt{\pi t})^m}e^{-c_1 t}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}|\omega_0(2\sqrt{t}\,s_1,\cdots,2\sqrt{t}\,s_m)|
\end{aligned}
$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \mathrm{sh}^{n-m} 2\sqrt{t}\, s_j \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^{n-m+2j-2}$$

$$\times F_{n-m+2j-2}(2\sqrt{t}\, s_j, t) \cdot (2\sqrt{t})^m \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_m$$

$$= v(m,n) \frac{1}{\pi^{mn-m}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-c_1 t} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty |(2\sqrt{t})^{-m(m-1)}$$

$$\times \omega_0(2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, 2\sqrt{t}\, s_m) | \prod_{j=1}^{m} s_{j=1}^{n-m} \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, s_j}{2\sqrt{t}\, s_j}\right)^{n-m}$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} F_{n-m+2j-2}(2\sqrt{t}\, s_j, t) \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_m, \tag{5.5.6}$$

其中

$$v(m,n) = \int \psi_0(\theta) \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{mn} \tag{5.5.7}$$

是 $O(m) \times \mathfrak{C}_{\mathrm{R}}(m,n)$ 的体积. 由于

$$(2\sqrt{t})^{-m(m-1)} \omega_0(2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, 2\sqrt{t}\, s_m)$$

$$= \prod_{j<k} \left[s_j^2 \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, s_j}{2\sqrt{t}\, s_j}\right)^2 - s_k^2 \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, s_k}{2\sqrt{t}\, s_k}\right)^2 \right],$$

因此

$$\lim_{t\to 0} (2\sqrt{t})^{-m(m-1)} \omega_0(2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, 2\sqrt{t}\, s_m)$$

$$= \prod_{j<k} (s_j^2 - s_k^2). \tag{5.5.8}$$

由(5.5.5)知

$$\lim_{t\to 0} F_k(2\sqrt{t}\, s, t)$$

$$= \lim_{t\to +0} \int_s^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial r_k}\right) \int_{r_2}^\infty \cdots \left(-\frac{\partial}{\partial r_2}\right) \int_{r_2}^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial r_1}\right) e^{-r_1^2 - \sqrt{t}\, c_0 r_1}$$

$$\times \frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2 \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, r_1}{z\sqrt{t}\, r_1}\right)^2 - r_2^2 \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, r_2}{r_2}\right)^2}} \cdots$$

$$\times \frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2 \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, r_k}{2\sqrt{t}\, r_k}\right)^2 - s^2 \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, s}{2\sqrt{t}\, s}\right)^2}}$$

$$= \int_s^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial r_k}\right)\int_{r_k}^\infty \cdots \left(-\frac{\partial}{\partial r_2}\right)\int_{r_2}^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial r_1}\right) e^{-r_1^2}$$

$$\times \frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2 - r_2^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}r_2}{\sqrt{r_2^2 - r_3^2}} \cdots \frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2 - s^2}} = Q_k(s). \quad (5.5.9)$$

由此知

$$Q_1(s) = -\int_s^\infty \frac{\partial}{\partial r_1} e^{-r_1^2} \frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2 - s^2}}$$

$$= 2\int_s^\infty r_1 e^{-r_1^2} \frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2 - s^2}}$$

$$= 2\int_s^\infty r_1 e^{-r_1^2} \sqrt{r_1^2 - s^2}\mathrm{d}r_1 > 0.$$

应用归纳法:假定

$$Q_{k-1}(s) = 2^{k-1}\int_s^\infty \int_{r_{k-1}}^\infty \cdots \int_{r_2}^\infty e^{-r_1^2} r_1 \cdots r_{k-1}$$

$$\times \sqrt{r_1^2 - r_2^2}\sqrt{r_2^2 - r_3^2}\cdots\sqrt{r_{k-1}^2 - s^2}\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2\cdots\mathrm{d}r_{k-1}, \quad (5.5.10)$$

故

$$Q_k(s) = -\int_s^\infty \frac{\partial}{\partial r_k} Q_{k-1}(r_k) \frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2 - s^2}}$$

$$= 2^{k-1}\int_s^\infty \left[\left(-\frac{\partial}{\partial r_k}\right)\int_{r_k}^\infty \cdots \int_{r_2}^\infty e^{-r_1^2} r_1 \cdots r_{k-1}\right.$$

$$\left.\times \sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{k-1}\right]\frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2 - s^2}}$$

$$= 2^{k-1}\int_s^\infty \left[\int_{r_k}^\infty \cdots \int_{r_2}^\infty e^{-r_1^2} r_1 \cdots r_{k-1}\sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots\sqrt{r_{k-2}^2 - r_{k-1}^2}\right.$$

$$\left.\times \frac{2r_k}{\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}}\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{k-2}\cdots\mathrm{d}r_{k-1}\right]\frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2 - s^2}}$$

$$= 2^{k-1}\int_s^{\infty}\left[\int_{r_k}^{\infty}\cdots\int_{r_2}^{\infty} e^{-r_1^2} r_1\cdots r_k \sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots\sqrt{r_{k-2}^2 - r_{k-1}^2}\right.$$

$$\left.\times \frac{\partial}{\partial r_{k-1}}\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\,\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{k-2}\mathrm{d}r_{k-1}\right]\frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_{k-1}^2 - s^2}}$$

$$= 2^{k-1}\int_s^{\infty}\int_{r_k}^{\infty}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial r_{k-1}}\right)Q_{k-2}(r_{k-1})\right]$$

$$\times r_k\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\,\mathrm{d}r_{k-1}\frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2 - s^2}}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= 2^k\int_s^{\infty}\left[\int_{r_k}^{\infty}\cdots\int_{r_2}^{\infty} e^{-r_1^2} r_1\cdots r_{k-1}\sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots\right.$$

$$\left.\times\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\,\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{k-1}\right]\mathrm{d}\sqrt{r_k^2 - s^2}$$

$$= 2^{k-1}\int_s^{\infty}\int_{r_k}^{\infty}\cdots\int_{r_2}^{\infty} e^{-r_1^2} r_1\cdots r_{k-1}\sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots$$

$$\times\left(-\frac{\partial}{\partial r_k}\right)\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\sqrt{r_k^2 - s^2}\,\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_k$$

$$= 2^{k-1}\int_s^{\infty}\int_{r_k}^{\infty}\cdots\int_{r_2}^{\infty} e^{-r_1^2} r_1\cdots r_{k-2} r_k\sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots$$

$$\times\sqrt{r_{k-1}^2 - r_{k-2}^2}\frac{\partial}{\partial r_{k-1}}\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\cdot\sqrt{r_k^2 - s^2}\,\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_k$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= 2^k\int_s^{\infty}\int_{r_k}^{\infty}\cdots\int_{r_2}^{\infty} e^{-r_1^2} r_1\cdots r_k\sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots$$

$$\times\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\sqrt{r_k^2 - s^2}\,\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_k.$$

由此知对所有 s，

$$Q_k(s) > 0. \tag{5.5.11}$$

由(5.5.8)、(5.5.9)知(5.5.6)当 t 从正趋于0时，有

$$c(\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)) = \lim_{t\to 0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)} h(r_1,\cdots,r_m,t)\,\dot{X}$$

$$= \frac{1}{\pi^{mn-m}} v(m,n)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \left|\prod_{j<k}(s_j^2 - s_k^2)\right|$$

$$\times \prod_{j=1}^m s_j^{n-m}\prod_{j=1}^m Q_{n-m+2j-2}(S_j)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_m > 0. \tag{5.5.12}$$

定理证毕. ▌

系5.5.2　常数 $c(\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n))$的值等于

$$\frac{1}{\pi^{mn-m}} v(m,n)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \prod_{j=1}^m s_j^{n-m}$$

$$\times \prod_{j<k}|s_j^2 - s_k^2|\prod_{j=1}^m Q_{n-m+2j-2}(s_j)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_m,$$

其中 $v(m,n)$为正交群 $O(m)$的体积乘以特征流形 $\mathfrak{C}_{\mathrm{R}}(m,n)$的体积.

$$Q_k(s) = 2^k\int_s^\infty\int_{r_k}^\infty\cdots\int_{r_2}^\infty e^{-r_1^2} r_1\cdots r_k\sqrt{r_1^2 - r_2^2}\cdots$$

$$\times\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}\sqrt{r_k^2 - s^2}\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_k.$$

定理5.5.3　给定在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$内连续并有界的函数 $\varphi(X)$有

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}\varphi(X)H(X,0,t)\,\dot{X} = \varphi(0).$$

证　由于

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}}\varphi(X)H(X,0,t)\,\dot{X} = \int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}}[\varphi(X) - \varphi(0)]H(X,0,t)\,\dot{X}$$

$$+\varphi(0)\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}}H(X,0,t)\,\dot{X}, \tag{5.5.13}$$

在上式右端第二项中,根据定理5.5.1,有

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}}H(X,0,t)\,\dot{X}\to 1,\ 当\ t\to 0.$$

因此,只要证明当 t 充分小时,第一项可任意小就足够了.

任给正数 ε,取以原点为中心的测地线圆盘

$$P_\delta^m = \{X \in \Re_{\mathrm{R}}(m,n) \mid r_1(X,0) < \delta, \cdots, r_m(X,0) < \delta\}$$

使得

$$\text{当 } X \in P_\delta^m \text{ 时}, |\varphi(X) - \varphi(0)| < \varepsilon.$$

由于 $\varphi(X)$有界,有正数 M 使得

$$|\varphi(X) - \varphi(0)| \leqslant M.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Re_{\mathrm{R}}} [\varphi(X) - \varphi(0)] H(X,0,t)(X)\right| \\
&\leqslant \int_{P_\delta^m} |\varphi(X) - \varphi(0)| H(X,0,t)\, \dot{X} \\
&\quad + \int_{\Re_{\mathrm{R}} - P_\delta^m} |\varphi(X) - \varphi(0)| \cdot |H(X,0,t)|\, \dot{X} \\
&< \varepsilon \int_{P_\delta^m} |H(X,0,t)|\, \dot{X} \\
&\quad + M \int_{\Re_{\mathrm{R}} - P_\delta^m} |H(X,0,t)|\, \dot{X}.
\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

由于当 $t \to 0$时,

$$\int_{P_\delta^m} |H(X,0,t)|\, \dot{X} \leqslant \int_{\Re_{\mathrm{R}}} |H(X,0,t)|\, \dot{X} \to 1,$$

因为由(5.5.6)、(5.5.9)、(5.5.11)知道

$$H(X,0,t) = \frac{1}{c(\Re_{\mathrm{R}})} h(r_1, \cdots, r_m, t)$$

当 t 充分小时为正,因此,当 t 充分小时,

$$|H(X,0,t)| = H(X,0,t) > 0.$$

同样,当 t 充分小时,根据(5.5.4),有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Re_{\mathrm{R}} - P_\delta^m} |H(X,0,t)|\, \dot{X} = \int_{\Re_{\mathrm{R}} - P_\delta^m} H(X,0,t)\, \dot{X} \\
&\leqslant \frac{1}{\pi^{mn-m}} \frac{e^{-c_1(m,n)t}}{(\sqrt{\pi t})^m} m \int_\delta^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left| \omega_0(r_1, \cdots, r_m) \right|
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \mathrm{sh}^{n-m} r_j \prod_{j=1}^{m} T_{r_j}^{n-m+2(j-1)} f_j(r_j,t) \mathrm{d}r_1 \cdots \mathrm{d}r_m$$

$$\times \int \psi_0(\theta) \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{mn}, \tag{5.5.15}$$

因此作变换 $r_1 = 2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, r_m = 2\sqrt{t}\, s_m$ 时，(5.5.15)变为

$$\int_{\mathfrak{R}_R - P_j^m} H(X,0,t) \dot{X}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^{mn-m}} v(m,n) \left(\frac{2}{\pi}\right)^m e^{-c_1 t} m \int_{\frac{\delta}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots$$

$$\times \int_0^{\infty} \left| (2\sqrt{t})^{-m(m-1)} \omega_0 (2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, 2\sqrt{t}\, s_m) \right|$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} s_j^{n-m} \left(\frac{\mathrm{sh} 2\sqrt{t}\, s_j}{2\sqrt{t}\, s_j} \right)^{n-m} \prod_{j=1}^{m} F_{n-m+2j-2}$$

$$\times (2\sqrt{t}\, s_j, t) \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_m. \tag{5.5.16}$$

当 δ 取定正数之后，t 充分小时，$\dfrac{\delta}{2\sqrt{t}}$可任意大，在(5.5.15)式中，因为积分是收敛的，故可取 t，使(5.5.16)小于 ε/M，因此不等式(5.5.14)可以化为

$$\left| \int_{\mathfrak{R}_R} [\varphi(X) - \varphi(0)] H(X,0,t) \dot{X} \right| < 2\varepsilon.$$

由(5.5.13)知

$$\left| \int_{\mathfrak{R}_R} \varphi(X) H(X,0,t) \dot{X} - \varphi(0) \right|$$

$$< 2\varepsilon + \left| \varphi(0) \right| \left| \int_{\mathfrak{R}_R} H(X,0,t) \dot{X} - 1 \right|,$$

因此，可取 δ 与 t 充分小，使得

$$\left| \int_{\mathfrak{R}_R} \varphi(X) H(X,0,t) - \varphi(0) \right| < 3\varepsilon.$$

定理已证明.　▎

由 $H(X,Y,t)$的两点不变性，在上节中已证明了以上的定理

包含了以下的定理.

定理5.5.4 设 $\varphi(Y)$是在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$中连续并有界的函数,则当 X 在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$任一紧子集中,一致地有

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}\varphi(Y)H(X,Y,t)\dot{Y}=\varphi(X).$$

以上定理与定理5.4.6及(5.4.45)式,说明了 $H(X,Y,t)$是热核. 由热核的构造式(5.4.45)及(5.4.49)知道,$H(X,Y,t)$是$(X,Y,t)\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}\times\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}\times\mathrm{R}_+$的实解析函数,因此任给在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$连续并有界的函数 $\varphi(Y)$,函数

$$f(X,t)=\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}}\varphi(Y)H(X,Y,t)\dot{Y} \tag{5.5.17}$$

是 X,t 的实解析函数.

综合本章的结果,我们有下面的基本定理:

定理5.5.5 在实超球

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)=\{X\in\mathrm{R}^{m\times n}\mid I-XX'>0\},$$

其中 $X=(x_{j\alpha})$是 $m\times n$ 矩阵$(m\leqslant n)$,它的在(5.2.6)变换下不变的黎曼度量的 Laplace-Beltrami 算子

$$\begin{aligned}\Delta=&\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\Big(\delta_{jk}-\sum_{\gamma=1}^{n}x_{j\gamma}x_{k\gamma}\Big)\Big(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{l=1}^{m}x_{l\alpha}x_{l\beta}\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_{j\alpha}\partial x_{k\beta}}\\&-2\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\delta_{jk}-\sum_{\gamma=1}^{n}x_{j\gamma}x_{k\gamma}\Big)x_{k\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}}\end{aligned}$$

的热方程$\dfrac{\partial f}{\partial t}=\Delta f$ 的热核

$$H(X,Y,t)\ \ ((X,Y,t)\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)\times\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)\mathrm{R}_+)$$

为以下的形式:

$$\begin{aligned}&H(X,Y,t)\\&\quad=\frac{1}{c(\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n))}h(r_1(X,Y),\cdots,r_m(X,Y),t)\\&\quad=\frac{1}{c(\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n))}\cdot\frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}T_{r_{j_1}}^{n-m}T_{r_{j_2}}^{n-m+2}\cdots\\&\quad\quad\times T_{r_{j_m}}^{n+m-2}h_0(r_1,\cdots,r_m,t),\end{aligned}$$

其中 $j_1,\cdots,j_m$ 是$1,\cdots,m$ 的一个排列，$r_j=r_j(X,Y)$ $(j=1,\cdots,m)$ 是以 Y 点为中心的伪测地坐标径向部分，亦即矩阵

$$\tau_Y(X)=[I-YY']^{\frac{1}{2}}(I-XY')^{-1}(X-Y)[I-Y'Y]^{-\frac{1}{2}}$$

的极坐标 $\tau_Y(X)=U(\Lambda,0)V$ 中

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\operatorname{th} r_1(X,Y) & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{th} r_m(X,Y)\end{pmatrix},$$

其中 U 与 V 分别为 m 阶与 n 阶实正交方阵；$r(X,Y)=[r_1^2(X,Y)+\cdots+r_m^2(X,Y)]^{1/2}$是 X 与 Y 两点间的测地距离；T_r 是微分算子，定义为

$$T_r g(r,v)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}2\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}g(\sigma,v)\right]_{\operatorname{ch}^2\sigma=\operatorname{ch}^2 r+\tau^2}\mathrm{d}\tau,$$

式中 $v=(v_1,\cdots,v_l)$是参数；

$$h_0(u_1,\cdots,u_m,t)=\frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{\pi^{mn-m}}\frac{1}{(\sqrt{\pi t})^m}$$

$$\times\exp\left[-c_1(m,n)t-\frac{1}{2}(n-m)\sum_{j=1}^m u_j-\frac{1}{4t}\sum_{j=1}^m u_j^2\right],$$

$$c_1(m,n)=\sum_{j=1}^m(m-j)(n-j)+\frac{1}{4}m(n-m)^2.$$

此即如此构造的 $H(X,Y,t)=H(Y,X,t)$适合热方程

$$\frac{\partial H(X,Y,t)}{\partial t}=\Delta H(X,Y,t),$$

并且对任一在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$连续并有界的函数 $\varphi(Y)$有

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}}\varphi(Y)H(X,Y,t)\dot{Y}=\varphi(X),$$

其中 $\dot{Y}$是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$的不变度量的体积元素.

系5.5.6　给定在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$中连续并有界的函数 $\varphi(Y)$，则

$$f(X,t)=\int_{Y\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}\varphi(Y)H(X,Y,t)\dot{Y}$$

是下面 Cauchy 问题的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(X,t)}{\partial t} = \Delta f(X,t),\\ f(X,0) = \varphi(X).\end{cases}$$

注 由热方程的理论知,此解是唯一的(见文献[65]).

现令

$$G(X,Y) = -\int_0^\infty H(X,Y,t)\mathrm{d}t, \tag{5.5.18}$$

根据定理5.5.5

$$H(X,Y,t) = \frac{e^{-c_1(m,n)t}}{c(\Re_{\mathrm{R}})(\sqrt{\pi t})^m} \times \frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}\prod_{j=1}^{m} T_{r_j}^{n-m+2j-2} f_1(r_j,t), \tag{5.5.19}$$

其中 $c_1(m,n)$是正数;

$$f_1(r,t) = \exp\left[-\frac{r^2}{4t} - \frac{1}{2}(n-m)r\right]. \tag{5.5.20}$$

因此有

$$\lim_{t\to\infty} H(X,Y,t) = 0. \tag{5.5.21}$$

任一函数 $\varphi(Y)$在 $\Re_{\mathrm{R}}(m,n)$连续并有界,则函数

$$\psi(X) = \int_{Y\in\Re_{\mathrm{R}}(m,n)} \varphi(Y)G(X,Y)\dot{Y} \tag{5.5.22}$$

根据定理5.5.5及(5.5.21)式,有

$$\begin{aligned}\Delta_X\psi(X) &= \int_{\Re_{\mathrm{R}}(m,n)} \varphi(Y)\Delta_X G(X,Y)\dot{Y}\\ &= -\int_{\Re_{\mathrm{R}}(m,n)} \varphi(Y)\int_0^\infty \Delta_X H(X,Y,t)\mathrm{d}t\dot{Y}\\ &= -\int_{\Re_{\mathrm{R}}(m,n)} \varphi(Y)\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}H(X,Y,t)\mathrm{d}t\dot{Y}\\ &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{\Re_{\mathrm{R}}(m,n)} \varphi(Y)H(X,Y,t)\dot{Y}\right]\mathrm{d}t\\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\Re_{\mathrm{R}}(m,n)} \varphi(Y)H(X,Y,t)\dot{Y}\end{aligned}$$

$$-\lim_{t\to\infty}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}\varphi(Y)H(X,Y,t)\dot{Y}$$

$$=\varphi(X). \tag{5.5.23}$$

定理5.5.7 令 $G(X,Y)=-\int_0^\infty H(X,Y,t)\mathrm{d}t$,
则 $G(X,Y)$是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$的不变 Laplace-Beltrami 算子 Δ 的 Green 函数. 即对任一在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)$上连续并有界的函数 $\varphi(Y)$,必有

$$\Delta\int_{Y\in\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(m,n)}\varphi(Y)G(X,Y)\dot{Y}=\varphi(X).$$

在本节最后要指出,实典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(2,n)$有复结构,它即是典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{N}}(N)$. 这里所谓"复结构"是指可以在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(2,N)$中引进复的坐标,使得对此复坐标 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(2,N)$的自同构变换是全纯的. 实际上,在《典》著的 § 2.1(iv)与 § 3.3(iv)中已经述及. 在该书的(2.1.67)中,变换

$$X=2\begin{pmatrix}zz'+1 & i(zz'-1)\\ \overline{zz'}+1 & -i(\overline{zz'}-1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z\\ \bar{z}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-1}{1-|zz'|^2}\begin{pmatrix}(\overline{zz'}-1)z+(zz'-1)\bar{z}\\ i(zz'+1)\bar{z}-i(\overline{zz'}+1)z\end{pmatrix} \tag{5.5.24}$$

适合

$$I-XX'$$

$$=2(1+|zz'|^2-2zz^{\dagger})\begin{pmatrix}\overline{zz'}+1 & -i(\overline{zz'}-1)\\ zz'+1 & i(zz'-1)\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix}\overline{zz'}+1 & -i(\overline{zz'}-1)\\ zz'+1 & i(zz'-1)\end{pmatrix}^{\dagger\,-1}>0, \tag{5.5.25}$$

即把 $z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{N}}(N)$映入 $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(2,N)$,它适合

$$z-\left(\frac{1+zz'}{2},\frac{1-zz'}{2i}\right)X=0, \tag{5.5.26}$$

并且适合此方程的$2\times N$ 矩阵 X 是唯一的(见《典》著中66页),故映照(5.5.24)是一一的. 特别是当 $z=0$时,对应 $X=0$. $\mathfrak{R}_{\mathrm{R}}(2,N)$的不变度量

$$ds^2 = \mathrm{tr}[(I - XX')^{-1}dX(I - X'X)^{-1}dX']$$

在 $X=0$ 为

$$ds^2|_{X=0} = \mathrm{tr}(dXdX').$$

由(5.5.24)知

$$[dX]_{z=0} = \begin{pmatrix} dz + \overline{dz} \\ i(dz - \overline{dz}) \end{pmatrix}.$$

故有

$$\begin{aligned} ds^2|_{X=0} &= (dz + \overline{dz})(dz + \overline{dz})^\dagger + (dz - \overline{dz})(dz - \overline{dz})^\dagger \\ &= 4dzdz^\dagger . \end{aligned} \tag{5.5.27}$$

根据《典》著中(3.3.56)可知，$\mathfrak{R}_N(m,n)$的不变量必为 $d\sigma^2=\lambda ds_N^2$ 的形式，取 $\lambda=\frac{2}{N}$，令(5.5.24)定义的映照为 f，则(5.5.27)即为

$$|f^* ds^2|_{X=0} = [d\sigma^2]_{z=0}.$$

由于 ds^2 与 $d\sigma^2$ 皆为不变度量，故在任一 $X=f(z)$ 点上式皆成立，即有

$$f^* ds^2 = \frac{2}{N}ds_N^2, \tag{5.5.28}$$

其中 ds_N^2 是《典》著中(3.3.56)定义的 $\mathfrak{R}_N(N)$的 Bergman 度量. 这证明了

$$f:\mathfrak{R}_N(N) \longrightarrow \mathfrak{R}_R(2,N)$$

是一个等度变换，因此，它们的 Laplace-Beltrami 算子分别为 Δ 与 Δ_N 时，有

$$\Delta = f_* \Delta_N. \tag{5.5.29}$$

故 $\mathfrak{R}_R(2,N)$的热核即 $\mathfrak{R}_N(N)$的热核.

由于 $r_j(X,X)=0$，故有以下的系：

系5.5.8 $H(X,X,t)$只与 t 有关，与 X 无

第 6 章

复超球及其他

在上一章的(5.1.14)已知，标准复的超球是标准实的超球与适当超平面相交所得的超球. 所以讨论实超球，在理论上也包括了对复超球的讨论. 不过用复坐标讨论复的超球，在符号使用方面简便得多. 正如讨论复变数的全纯函数，完全可以用实的调和函数及其共轭调和函数来代替那样，但是符号复杂得多，而且有些性质难以从调和函数看得出来. 此外，典型域皆是复的超球，是超球概念的起源，更重要的是典型域及其扩充空间的不变度量皆是 Kähler 度量，相应的有 Kähler(1,1)-式，这在实的情形没有类似的定义，由 Kähler 度量可以推知许多几何性质，这是在实的情形难以做到的.

§6.1 复 Grassmann 流形的调和式

在§5.1 中的开头便提到，复的超球是在 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(m,n)$ 上定义的，假定 $m\leqslant n$. 在《典》著中§3.2 已知道，$\mathfrak{F}(m,n)$ 有在 $SU(m+n)$ 诱导的变换下不变的度量 $\mathrm{d}s^2$，它在标准邻域 $\mathfrak{V}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 中能表示为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{tr}[(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z(I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger}],\quad(6.1.1)$$

其中 $Z=(z_{j\alpha})$ 是 $m\times n$ 复矩阵，它的元素 $z_{j\alpha}$ 是 $\mathfrak{V}(\alpha)$ 中的标准坐标. (1,1)-式

$$\begin{aligned}\omega&=\mathrm{tr}[(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z\wedge(I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger}]\\&=\partial\bar{\partial}\log det(I+ZZ^{\dagger}),\end{aligned}\quad(6.1.2)$$

故这是一 Kähler(1,1)-式. 这在实的情形是没有的，因为当 X 是

实矩阵时，

$$\operatorname{tr}[(I+XX')^{-1}\mathrm{d}X \wedge (I+X'X)^{-1}\mathrm{d}X'] \equiv 0.$$

(1,1)-式(6.1.2)是下面的 $m\times m$ 方阵

$$\Omega(Z,\mathrm{d}Z) = (I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger} \tag{6.1.3}$$

的迹. 由于

$$\begin{aligned}\partial\Omega(Z,\mathrm{d}Z) = & -(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z \wedge Z^{\dagger}(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z \\ & \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger} + (I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z \\ & \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}Z^{\dagger}\mathrm{d}Z \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger} \\ = & -(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}Z^{\dagger}\mathrm{d}Z \\ & \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger} + (I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z \\ & \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}Z^{\dagger}\mathrm{d}Z \wedge (I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger} \\ = & \ 0.\end{aligned}$$

此表示

$$\Omega(Z,\mathrm{d}Z) = (\omega_{jk}) \tag{6.1.4}$$

的 m^2 个(1,1)-式 ω_{jk} 皆适合

$$\partial\omega_{jk} = 0. \tag{6.1.5}$$

同理可证

$$\bar{\partial}\omega_{jk} = 0. \tag{6.1.6}$$

令 $\sigma_j(\Omega)$ 表示 Ω 的 j 阶主子行列式的和，则由(6.1.5)与(6.1.6)可知

$$\partial\sigma_j(\Omega) = 0,\ \bar{\partial}\sigma_j(\Omega) = 0. \tag{6.1.7}$$

如 $\mathfrak{U}\in SU(m+n)$，则由 $\mathfrak{U}$ 诱导出一全纯自同构

$$\tau_{\mathfrak{U}}:\mathfrak{F}(m,n)\to\mathfrak{F}(m,n).$$

此自同构的标准局部坐标表示为

$$\begin{aligned}W &= (A+ZB)^{-1}(C+ZD) \\ &= (-B^{\dagger}+A^{\dagger}Z)(D^{\dagger}-C^{\dagger}Z)^{-1},\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

其中

$$\begin{matrix} & m & n \\ \end{matrix}\quad \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \tag{6.1.9}$$

成一酉方阵. 易证

$$\Omega(W,\mathrm{d}W) = (A+ZB)^{\dagger}\,\Omega(Z,\mathrm{d}Z)(A+ZB)^{\dagger\,-1}. \tag{6.1.10}$$

因此有

$$\sigma_j(\Omega(W,\mathrm{d}W)) = \sigma_j(\Omega(Z,\mathrm{d}Z)). \tag{6.1.11}$$

这证明了 $\sigma_j(\Omega(Z,\mathrm{d}Z))$在酉群 $SU(m+n)$诱导的变换下是不变的.

我们观察 $\sigma_j(\Omega)$的几何意义,令 $E(m,n)$为所有 $m\times(m+n)$的秩为 m 的复矩阵 $\mathfrak{Z}$ 所生成的空间. 有自然的投影 $\pi: E(m,n)\to \mathfrak{F}(m,n)$,使得 $E(\mathfrak{F}(m,n),GL(m,C))$构成一主纤维丛,令 $M(\alpha)=M(\alpha_1\cdots\alpha_m)$为 $E(m,n)$中所有矩阵 $\mathfrak{Z}$,它的第 α_1列,…,第 α_m 列($1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_m\leqslant m+n$)所成的方阵是非异的,则 $E(m,n)$由 $M(\alpha)$盖过. 如果 $\mathfrak{Z}\in M(\alpha)\cap M(\beta)$,即$[\mathfrak{Z}]\in\mathfrak{V}(\alpha)\cap\mathfrak{V}(\beta)$,于是有排列方阵$P(\alpha)$与 $P(\beta)$(参阅 § 1.1,$P(\alpha)$与 $P(\beta)$是行列式为1的酉方阵)使得

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2)P(\alpha) = (\mathfrak{W}_1,\mathfrak{W}_2)P(\beta),$$

其中 $\mathfrak{Z}_1$与 $\mathfrak{W}_1$皆是 $m\times m$ 非异方阵,由此知

$$(\mathfrak{W}_1,\mathfrak{W}_2) = (\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2)P(\alpha)P(\beta)^{\dagger}. \tag{6.1.12}$$

记

$$P(\alpha)P(\beta)^{\dagger} = \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_2 & C_4 \end{pmatrix}, \tag{6.1.13}$$

于是有

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{Z}_1(C_1+ZC_2) = \mathfrak{Z}_1\varphi_{\alpha\beta}(Z), \tag{6.1.14}$$

其中 $Z=\mathfrak{Z}_1^{-1}\mathfrak{Z}_2$(的元素)是 $\mathfrak{V}(\alpha)$中的局部坐标,

$$\varphi_{\alpha\beta}(Z) = C_1+ZC_2 \tag{6.1.15}$$

是非异的,因为 $\mathfrak{W}_1$与 $\mathfrak{Z}_1$都是非异的,即 $C_1+ZC_2\in GL(m,\mathrm{C})$,亦即

$$\varphi_{\alpha\beta}:\mathfrak{V}(\alpha)\cap\mathfrak{V}(\beta)\to GL(m,\mathrm{C}) \tag{6.1.16}$$

是纤维丛 $E(\mathfrak{F}(m,n),GL(m,\mathrm{C}))$的连接函数(transition function).

我们在 $E(\mathfrak{F}(m,n),GL(m,\mathrm{C}))$ 中引进联络 Γ 如下：在 $\mathfrak{F}(m,n)$ 的邻域 $\mathfrak{V}(\alpha)$ 中令

$$\begin{aligned}\Gamma(Z,\mathrm{d}Z) &= \partial(I+ZZ^{\dagger})\cdot(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\\ &= \mathrm{d}ZZ^{\dagger}(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\\ &= \mathrm{d}Z(I+Z^{\dagger}Z)^{-1}Z^{\dagger}.\end{aligned}\tag{6.1.17}$$

令 $W=\mathfrak{W}_1^{-1}\mathfrak{W}_2$ 是 $\mathfrak{V}(\beta)$ 的局部坐标，由(6.1.12)知局部坐标变换为

$$\begin{aligned}W &= (C_1+ZC_2)^{-1}(C_3+ZC_4)\\ &= (-C_2^{\dagger}+C_1^{\dagger}Z)(C_4^{\dagger}-C_3^{\dagger}Z)^{-1}.\end{aligned}\tag{6.1.18}$$

由于

$$I+W^{\dagger}W=(C_4-Z^{\dagger}C_3)^{-1}(I+Z^{\dagger}Z)(C_4^{\dagger}-C_3^{\dagger}Z)^{-1}$$

及

$$\mathrm{d}W=(C_1+ZC_2)^{-1}\mathrm{d}Z(C_4^{\dagger}-C_3^{\dagger}Z)^{-1},$$

故有

$$\begin{aligned}&\Gamma(W,\mathrm{d}W)\\ &= \mathrm{d}W(I+W^{\dagger}W)^{-1}W^{\dagger}\\ &= (C_1+ZC_2)^{-1}\mathrm{d}Z(I+Z^{\dagger}Z)^{-1}(-C_2+Z^{\dagger}C_1)\\ &= (C_1+ZC_2)^{-1}\mathrm{d}Z(I+Z^{\dagger}Z)^{-1}[Z^{\dagger}(C_1+ZC_2)\\ &\quad -(I+Z^{\dagger}Z)C_2].\end{aligned}$$

根据(6.1.15)，上式即为

$$\begin{aligned}\Gamma(W,\mathrm{d}W) &= \varphi_{\alpha\beta}(Z)^{-1}\Gamma(Z,\mathrm{d}Z)\varphi_{\alpha\beta}(Z)\\ &\quad -\varphi_{\alpha\beta}(Z)^{-1}\mathrm{d}\varphi_{\alpha\beta}(Z)\\ &= [\varphi_{\alpha\beta}(Z)]^{-1}\Gamma(Z,\mathrm{d}Z)\varphi_{\alpha\beta}(Z)\\ &\quad +\mathrm{d}[\varphi_{\alpha\beta}(Z)^{-1}][\varphi_{\alpha\beta}(Z)^{-1}]^{-1}.\end{aligned}\tag{6.1.19}$$

由(6.1.14)知

$$\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{W}_1\varphi_{\alpha\beta}(Z)^{-1};$$

由(6.1.12)知

$$(\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2)=(\mathfrak{W}_1,\mathfrak{W}_2)[P(\alpha)P(\beta)^{\dagger}]^{-1}$$

$$= (\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2)\begin{pmatrix} C_1^\dagger & C_2^\dagger \\ C_3^\dagger & C_4^\dagger \end{pmatrix}.$$

故有

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{W}_1(C_1^\dagger + WC_3^\dagger) = \mathfrak{W}_1\varphi_{\beta\alpha}(W),$$

$$\varphi_{\beta\alpha}(W) = C_1^\dagger + WC_3^\dagger \in GL(m, \mathrm{C}),$$

并且

$$\varphi_{\alpha\beta}(Z)^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}(W). \tag{6.1.20}$$

故(6.1.19)又可写为

$$\Gamma(W, \mathrm{d}W) = \varphi_{\beta\alpha}(W)\Gamma(Z, \mathrm{d}Z)\varphi_{\beta\alpha}(W)^{-1} + \mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha}(W)\cdot\varphi_{\beta\alpha}(W)^{-1}. \tag{6.1.21}$$

因此,$\Gamma(Z, \mathrm{d}Z)$定义了纤维丛上的一个联络 Γ. 易见

$$\partial\Gamma - \Gamma \wedge \Gamma = 0.$$

因此曲率式[①]

$$\Omega_1(Z, \mathrm{d}Z) = -(\mathrm{d}\Gamma - \Gamma \wedge \Gamma) = -\bar{\partial}\Gamma \tag{6.1.22}$$

$$= \mathrm{d}Z(I + Z^\dagger Z)^{-1} \wedge \mathrm{d}Z^\dagger(I + ZZ^\dagger)^{-1}. \tag{6.1.23}$$

由此知

$$\sigma_j(\Omega_1) = \sigma_j(\Omega), \tag{6.1.24}$$

因为由 $\det(I - AB) = \det(I - BA)$知

$$\det\left(\lambda 1 - \frac{1}{2\pi i}\Omega_1\right) = \det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi i}\Omega\right)$$

$$= \lambda^m - \frac{1}{2\pi i}\sigma_1(\Omega)\lambda^{m-1} + \frac{1}{(2\pi i)^2}\sigma_2(\Omega) + \cdots + (-1)^m\frac{1}{(2\pi i)^m}\sigma_m(\Omega). \tag{6.1.25}$$

根据陈省身示性类的定义,$\sigma_j(\Omega)$是第 j 个陈类(的代表).

定理6.1.1　在复 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(m, n)$上,在标准局部坐

---

① 这里曲率式取 $-(\mathrm{d}\Gamma - \Gamma \wedge \Gamma)$,而不取 $\mathrm{d}\Gamma - \Gamma \wedge \Gamma$,因为与西曲率的定义 $-\bar{\partial}\Gamma$ 一致.

标中引进

$$\Omega(Z,\mathrm{d}Z)=(I+ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z\wedge(I+Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger}.$$

令 $\sigma_j(\Omega)$为其 j 阶主子行列式的和，则 $\sigma_j(\Omega)$是第 j 个陈类(的代表)，它是 $SU(m+n)$下不变的闭(j,j)-式.

定理6.1.2　在复 Grassmann 流形上任何 $SU(m+n)$下不变的外微分式必能表达为 $\sigma_1(\Omega),\cdots,\sigma_m(\Omega)$的多项式. 此外，$\sigma_1(\Omega),\cdots,\sigma_m(\Omega)$是代数独立的.

证　首先证明任何在 $SU(m+n)$下不变的(p,q)-式当 $p\neq q$ 时，必定为0.

实际上，当不变的(p,q)-式为

$$\omega=\frac{1}{p!q!}K_{A_1\cdots A_p\overline{B}_1\cdots\overline{B}_q}\mathrm{d}z^{A_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{A_p}\wedge\overline{\mathrm{d}z}^{B_1}\wedge\cdots\overline{\mathrm{d}z}^{B_q},$$

其中 $z^1,\cdots,z^{mn}$是把 $Z=(z_{j\alpha})$排列成单一的次序，并用和号的省略，大写字母表示从1到 mn. 在(6.1.9)中取 $B=0,C=0,D=I,A=e^{-i\theta}I$，则(6.1.8)为 $w^A=e^{i\theta}z^A$，因此

$$\omega_0=\omega|_{z=0}=e^{i(p-q)\theta}\omega_0.$$

当 $p\neq q$ 时，必须 $\omega_0=0$. 由于 ω 在 $SU(m+n)$(的变换)下不变，而 $\mathfrak{F}(m,n)$在 $SU(m+n)$下可递，因此对任一点皆有 $\omega=0$.

故只须证明定理对不变的(p,p)-式成立便可以了. 由不变性质与可递性，只须证明在 $z=0$点定理成立即可. 设

$$\omega_0=A_{(i_1\alpha_1)\overline{(j_1\beta_1)}\cdots(i_p\alpha_p)\overline{(j_p\beta_p)}}\cdot\frac{\mathrm{d}z_{i_1\alpha_1}\wedge\overline{\mathrm{d}z}_{j_1\beta_1}}{2\pi i}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}z_{i_p\alpha_p}\wedge\overline{\mathrm{d}z}_{j_p\beta_p}}{2\pi i}.$$

式中拉丁字母指标从1到 m，希腊字母指标从1到 n，$A_{(i_1\alpha_1)\overline{(j_1\beta_1)}\cdots(i_p\alpha_p)\overline{(j_p\beta_p)}}$是常数. 设 $\sigma:(1,\cdots,2p)\to(\sigma(1),\cdots,\sigma(2p))$是 $1,\cdots,2p$ 的一个排列. 令 $\varepsilon(\sigma)=+1$，当 σ 是一个偶排列；$\varepsilon(\sigma)=-1$，当 σ 是一奇排列.

令
$$X_a = H_a^{j\alpha}\frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}} + \overline{H}_a^{j\alpha}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{j\alpha}} \quad (a = 1, \cdots, 2p)$$
是$2p$个切向量. 由于
$$\begin{aligned}\omega_0(X_1, \cdots, X_{2p}) = & \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) A_{(i_1\alpha_1)\overline{(j_1\beta_1)}\cdots(i_p\alpha_p)\overline{(j_p\beta_p)}} \\ & \times \frac{1}{2\pi i}\left(H_{\sigma(1)}^{i_1\alpha_1} H_{\sigma(2)}^{\overline{j_1\beta_1}} - H_{\sigma(2)}^{i_1\alpha_1} H_{\sigma(1)}^{\overline{j_1\beta_1}}\right)\cdots \\ & \times \frac{1}{2\pi i}\left(H_{\sigma(2p-1)}^{i_p\alpha_p} H_{\sigma(2p)}^{\overline{j_p\beta_p}} - H_{\sigma(2p)}^{i_p\alpha_p} H_{\sigma(2p-1)}^{\overline{j_p\beta_p}}\right) \\ = & f(H_1, \cdots, H_{2p}), \ H_a = (H_a^{j\alpha}). \quad (6.1.26)\end{aligned}$$
这是 $H_1, \cdots, H_{2p}$的实多元线性函数,并且对 $H_1, \cdots, H_{2p}$是反称的. 由于 ω_0是在变换 $W=ZV$ 下不变,V 是 $n\times n$ 酉方阵,即有
$$f(H_1V, \cdots, H_{2p}V) = f(H_1, \cdots, H_{2p}).$$
根据 Weyl 的定理,f 必然是 $H_aH_b^\dagger$ 的函数(a、$b=1, \cdots, 2p$). 由于 f 是多元线性函数,故它必是下面的形式:
$$f(H_1, \cdots, H_{2p}) = \sum_\sigma \varphi_\sigma\left(H_{\sigma(1)}H_{\sigma(2)}^\dagger, \cdots, H_{\sigma(2p-1)}H_{\sigma(2p)}^\dagger\right),$$
其中每一个 φ_σ 皆是 $H_1, \cdots, H_{2p}$的多元线性函数.

此外,由于 $f(H_1, \cdots, H_{2p})$是对 $H_1, \cdots, H_{2p}$反称的,
$$\begin{aligned}f(H_1, \cdots, H_{2p}) = & \frac{1}{2}[f(H_1, \cdots, H_{2p}) \\ & - f(H_2, H_1, H_3, \cdots, H_{2p})] \\ = & \frac{1}{2}\sum_\sigma \varphi_\sigma\Big(H_{\sigma(1)}H_{\sigma(2)}^\dagger - H_{\sigma(2)}H_{\sigma(1)}^\dagger, \\ & H_{\sigma(3)}H_{\sigma(4)}^\dagger, \cdots, H_{\sigma(2p-1)}H_{\sigma(2p)}^\dagger\Big) \\ = & \cdots\cdots \\ = & \frac{1}{2^p}\sum_\sigma \varphi_\sigma\Big(H_{\sigma(1)}H_{\sigma(2)}^\dagger - H_{\sigma(2)}H_{\sigma(1)}^\dagger, \\ & \cdots, H_{\sigma(2p-1)}H_{\sigma(2p)}^\dagger - H_{\sigma(2p)}H_{\sigma(2p-1)}^\dagger\Big).\end{aligned}$$
这证明了 f 可以表示为

$$f(H_1,\cdots,H_{2p})=\sum_{\sigma}B_{i_1\bar{j}_1\cdots i_p\bar{j}_p}(\sigma)\frac{1}{(2\pi i)^p}$$

$$\times\left(H^{i_1\alpha_1}_{\sigma(1)}\overline{H^{j_1\alpha_1}_{\sigma(2)}}-H^{i_1\alpha_1}_{\sigma(2)}\overline{H^{j_1\alpha_1}_{\sigma(1)}}\right)\cdots$$

$$\times\left(H^{i_p\alpha_p}_{\sigma(2p-1)}\overline{H^{j_p\alpha_p}_{\sigma(2p)}}-H^{i_p\alpha_p}_{\sigma(2p-1)}\overline{H^{j_p\alpha_p}_{\sigma(2p)}}\right).\quad(6.1.27)$$

比较(6.1.26)与(6.1.27)两式,得知

$$\varepsilon(\sigma)A_{(i_1\alpha_1)\overline{(j_1\beta_1)}\cdots(i_p\alpha_p)\overline{(j_p\beta_p)}}=B_{i_1\bar{j}_1\cdots i_p\bar{j}_p}(\sigma)\delta_{\alpha_1\beta_1}\cdots\delta_{\alpha_p\beta_p}.$$

特别地,由此知道

$$B_{i_1\bar{j}_1\cdots i_p\bar{j}_p}(\sigma)=\varepsilon(\sigma)B_{i_1\bar{j}_1\cdots i_p\bar{j}_p}(e),$$

其中 e 是恒同的排列. 令

$$B_{i_1\bar{j}_1\cdots i_p\bar{j}_p}=B_{i_1\bar{j}_1\cdots i_p\bar{j}_p}(e).$$

以之代入(6.1.27),便得

$$\omega_0(X_1,\cdots,X_{2p})=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)B_{i_1\bar{j}_1\cdots i_p\bar{j}_p}$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\left(H^{i_1\alpha_1}_{\sigma(1)}\overline{H^{j_1\alpha_1}_{\sigma(2)}}-H^{i_1\alpha_1}_{\sigma(2)}\overline{H^{j_1\alpha_1}_{\sigma(1)}}\right)\cdots$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\left(H^{i_p\alpha_p}_{\sigma(2p-1)}\overline{H^{j_p\alpha_p}_{\sigma(2p)}}-H^{i_p\alpha_p}_{\sigma(2p)}\overline{H^{j_p\alpha_p}_{\sigma(2p-1)}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^p}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)\psi(X_{\sigma(1)\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(2p-1)\sigma(p)}),\quad(6.1.28)$$

其中

$$X_{ab}=H_aH_b^{\dagger}-H_bH_a^{\dagger}.\quad(6.1.29)$$

根据熟知的结果(见文献[30],Th. 25,Chap. XⅡ),$\psi(X,\cdots,X)$(其中 X 是 $m\times m$ 方阵,适合 $X^{\dagger}=-X$)可以由 $\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X)$ 代数生成,并且 $\sigma_1(X),\cdots,\sigma_m(X)$ 是代数独立的. 令

$$\Omega_0=\mathrm{d}Z\wedge\mathrm{d}Z^{\dagger},$$

则

$$\Omega_0^{\dagger}=-\Omega_0.$$

故

$$\psi(\Omega_0,\cdots,\Omega_0)$$

$$= \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=p} C_{k_1\cdots k_p} \sigma_1^{k_m}(\Omega_0)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega_0). \qquad (6.1.30)$$

由于

$$\Omega_0(X_a, X_b) = X_{ab}$$

及

$$\begin{aligned} &\psi(\Omega_0, \cdots, \Omega_0)(X_1, \cdots, X_{2p}) \\ &= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\psi(\Omega_0(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \\ &\quad \cdots, \Omega_0(X_{\sigma(2p-1)}, X_{\sigma(2p)})) \\ &= \omega_0(X_1, \cdots, X_{2p}). \end{aligned}$$

这就证明了

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \psi(\Omega_0, \cdots, \Omega_0) \\ &= \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=p} C_{k_1\cdots k_m} \sigma_1^{k_1}(\Omega_0)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega_0), \end{aligned}$$

其中 $C_{k_1,\cdots,k_m}$ 是常数，$\sigma_1(\Omega_0), \cdots, \sigma_m(\Omega_0)$ 是代数独立的.

由于 ω 与 $\sigma_j(\Omega)$ 皆是在 $SU(m+n)$ 下不变的，而 $\mathfrak{F}(m,n)$ 在 $SU(m+n)$ 下可递，因此有

$$\omega = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=p} C_{p_1\cdots p_m} \sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega).$$

而 $\sigma_1(\Omega), \cdots, \sigma_m(\Omega)$ 是代数独立的. 定理得到证明. ▌

这个定理有不少应用之处，首先 $\sigma_j(\Omega)$ 的 Hodge 对偶(参阅附录) $*\sigma_j(\Omega)$ 是 $(N-j, N-j)$-式 $(N=mn)$. 由于(6.1.11)是不变度量，$*\sigma_j(\Omega)$ 是不变的 $(N-j, N-j)$-式. 根据定理6.1.1，它必能表示为 $\sigma_1(\Omega), \cdots, \sigma_m(\Omega)$ 的多项式. 根据(6.1.7)，有

$$\partial * \sigma_j(\Omega) = 0, \bar{\partial} * \sigma_j(\Omega) = 0,$$

故

$$* \partial * \sigma_j(\Omega) = 0, * \bar{\partial} * \sigma_j(\Omega) = 0,$$

即有

$$\partial^* \sigma_j(\Omega) = 0, \bar{\partial}^* \sigma_j(\Omega) = 0. \qquad (6.1.31)$$

由于在 Kähler 流形，调和算子(见附录)

$$\Delta = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial),$$

故有

$$\Delta\sigma_j(\Omega) = 0, j = 1, \cdots, m. \tag{6.1.32}$$

定理6.1.2中的陈类 $\sigma_j(\Omega)(j=1,\cdots,m)$ 是在 $SU(m+n)$ 下不变的 (j,j)-式，并适合

$$\partial\sigma_j(\Omega) = 0,\ \bar{\partial}\sigma_j(\Omega) = 0,\ \partial^*\sigma_j(\Omega) = 0,\ \bar{\partial}^*\sigma_j(\Omega) = 0,$$

因此 $\sigma_j(\Omega)$ 是调和式.

由于 $\sigma_1(\Omega),\cdots,\sigma_m(\Omega)$ 是代数独立的，因此给定正数 p，

$$\begin{gathered}\sigma_1^{k_1}(\Omega)\sigma_2^{k_2}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega), \\ k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = p,\end{gathered} \tag{6.1.33}$$

必定是线性独立的，并且

$$\mathrm{d}[\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega)] = 0, \tag{6.1.34}$$

因为 $\mathrm{d}=\partial+\bar{\partial}$，据定理6.1.1

$$*\ \sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega)$$

能表为 $\sigma_1(\Omega),\cdots,\sigma_m(\Omega)$ 的多项式，故有

$$\delta[\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega)] = 0. \tag{6.1.35}$$

因此有

$$\Delta[\sigma_1^{k_m}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_1}(\Omega)] = 0. \tag{6.1.36}$$

即 $\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega)$ 是调和 (p,p)-式，令方程

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = p \tag{6.1.37}$$

的非负整数解的个数为 B_{2p}. 根据定理6.1.1可知，此 B_{2p} 个调和式 $\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega)$ 必是线性独立的. B_{2p} 也是复 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(m,n)$ 的 $2p$ 维 Betti 数（见文献[10]或[77]中用 Morse 函数的证明）. 因此，根据 Hodge 定理，$\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega)$，$k_1+2k_2+\cdots+mk_m=p$ 是 (p,p)-调和式的一组基，即任一 (p,p)-调和式 ω 可写为

$$\omega = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=p} C_{k_1,\cdots,k_m}\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega). \tag{6.1.38}$$

定理6.1.3 复 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(m,n)$ 上任一调和式必能由陈类 $\sigma_1(\Omega),\cdots,\sigma_m(\Omega)$ 代数生成. 任一调和 (p,p) 式必能表为

$$\omega = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=p} C_{k_1,\cdots,k_m}\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega),$$

即 $\sigma_1^{k_1}(\Omega)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega)$、$(k_1,\cdots,k_m)$通过方程(6.1.37)的解构成$(p,p)$-调和式的一组基，因此调和式 ω 必定是在 $SU(m+n)$下不变的.

我们可作一个非异的线性变换

$$\varphi_{l_1,\cdots,l_m}(Z,\mathrm{d}Z)=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=p}C_{l_1\cdots l_m k_1\cdots k_m}$$

$$\times\ \sigma_1^{k_1}(\Omega(Z,\mathrm{d}Z)\cdots\sigma_m^{k_m}(\Omega(Z,\mathrm{d}Z)),\quad(6.1.39)$$

$$l_1+2l_2+\cdots+ml_m=p,$$

使得

$$(\varphi_{l_1\cdots l_m},\varphi_{k_1\cdots k_m})=\int_{\mathfrak{F}(m,n)}\varphi_{l_1\cdots l_m}*\bar{\varphi}_{k_1\cdots k_m}$$

$$=\delta_{l_1k_1}\cdots\delta_{l_mk_m}\quad,\qquad(6.1.40)$$

则

$$h_{p,p}(Z,\overline{W})$$

$$=\sum_{l_1+2l_2+\cdots+ml_m=p}\varphi_{l_1\cdots l_m}(Z,\mathrm{d}Z)\,\overline{\varphi_{l_1\cdots l_m}(W,\mathrm{d}W)},\qquad(6.1.41)$$

它对 Z 是调和(p,p)-式，对 W 也是调和(p,p)-式，称为调和(p,p)-式的核.

系6.1.4　$\mathfrak{F}(m,n)$上任一调和(p,p)-式 $\omega(Z,\mathrm{d}Z)$必有

$$\omega(Z,\mathrm{d}Z)=\int_{W\in\mathfrak{F}(m,n)}\omega(W,\mathrm{d}W)*_W h_{p,p}(Z,W).$$

在此我们具体的构造了纤维丛 $E(\mathfrak{F}(m,n),GL(m,\mathrm{C}))$的第 j 个陈类 $\sigma_j(\Omega)(j=1,\cdots,m)$，并证明了 $\mathfrak{F}(m,n)$上任一调和(p,p)-式必能由 $\sigma_1(\Omega),\cdots,\sigma_m(\Omega)$代数生成，把复 Grassmann 流形看作为标准复超球 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的扩充空间，从而有理由相信，其他典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$，$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}(n)$及 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(N)$的扩充空间(见《典》著中第一章)，也可用此法具体构造出这些空间的调和式. 但由于本书交稿日期所限，没有时间去讨论它们了.

§6.2 复超球的内切超圆坐标

典型域

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)=\{W\in \mathbb{C}^{m\times n}\,|\,I-WW^{\dagger}>0\}\tag{6.2.1}$$

作为复 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}(m,n)$中的标准超球

$$\mathfrak{W}\begin{pmatrix}I^{(m)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix}\mathfrak{W}^{\dagger}>0,\tag{6.2.2}$$

其中 $\mathfrak{W}$ 是 $\mathfrak{F}(m,n)$的点$[\mathfrak{W}]$的齐次坐标,即是秩为 m 的 $m\times(m+n)$矩阵. 记

$$\mathfrak{W}=\underset{\quad m\qquad n}{(\mathfrak{W}_1,\mathfrak{W}_2)}\ \ m,\tag{6.2.3}$$

则 $\mathfrak{W}$ 适合(6.2.2)时,$\mathfrak{W}_1$必是非异的,即$[\mathfrak{W}]$落在 $\mathfrak{F}(m,n)$的标准坐标邻域 $\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$中,而 $m\times n$ 矩阵

$$W=\mathfrak{W}_1^{-1}\mathfrak{W}_2$$

的元素 $w_{j\alpha}$是 $\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$的标准局部坐标,(6.2.1)式即标准超球(6.2.2)在 $\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$中的局部坐标表示.

假定 $m\leqslant n$,作变换

$$\mathfrak{W}=Q\mathfrak{Z}\begin{pmatrix}I^{(m)} & I^{(m)} & 0\\ I^{(m)} & -I^{(m)} & 0\\ 0 & 0 & 2I^{(n-m)}\end{pmatrix},\tag{6.2.4}$$

则(6.2.3)定义的标准超球变为超球

$$\mathfrak{Z}\begin{pmatrix}0 & I^{(m)} & 0\\ I^{(m)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2I^{(n-m)}\end{pmatrix}\mathfrak{Z}^{\dagger}>0,\tag{6.2.5}$$

记

$$\mathfrak{Z}=\underset{\quad m\qquad n}{(\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2)}\ \ m,$$

则适合(6.2.5)的 $\mathfrak{Z}$ 中,$\mathfrak{Z}_1$不见得一定是非异的,但是却有 $\mathfrak{Z}_1$非异的 $\mathfrak{Z}$ 适合(6.2.5),例如 $\mathfrak{Z}=(I,I,0)$便是. 适合(6.2.5)而 $\mathfrak{Z}_1$非异

的 $\mathfrak{Z}$，即$[\mathfrak{Z}]$落在坐标邻域 $\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$的点有局部坐标

$$Z = \mathfrak{Z}_1^{-1}\mathfrak{Z}_2.$$

由于假定了 $m\leqslant n$，可记

$$Z = \underset{m\quad n-m}{(Z_1, Z_2)}\ m,$$

故由(6.2.5)定义的超球 $\mathfrak{H}_1(m,n)$在坐标邻域 $\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$中的局部坐标表示为

$$\mathfrak{H}_1(m,n) = \left\{(Z_1,Z_2) \in \mathbb{C}^{m\times n} \,\middle|\, \frac{1}{2}(Z_1 + Z_1^\dagger) - Z_2Z_2^\dagger > 0\right\}. \tag{6.2.6}$$

不难证明当 $\mathfrak{Z}_1$是奇异时，即

$$\det \mathfrak{Z}_1 = 0$$

是 $\mathfrak{F}(m,n)$的复超曲面，称为 $\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$的"无穷远"点. 此时 $\mathfrak{Z}$ 不适合(6.2.5)，但可以有这样的 $\mathfrak{Z}$，使

$$\mathfrak{Z}\begin{pmatrix} 0 & I & \\ I & 0 & \\ & & -2I \end{pmatrix}\mathfrak{Z}^\dagger \geqslant 0,$$

$$\det \mathfrak{Z}\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2I \end{pmatrix}\mathfrak{Z}^\dagger = 0.$$

换言之，无穷远点只可能是超球 $\mathfrak{H}_1(m,n)$的边界点，因此适合(6.2.6)的 Z 点，是超球 $\mathfrak{H}_1(m,n)$的全部内点.

记

$$W = \underset{m\quad n-m}{(W_1, W_2)}\,m,$$

则(6.2.4)即

$$(I, W_1, W_2) = \mathfrak{W}_1^{-1}Q\mathfrak{Z}_1(I + Z_1,\ I - Z_1,\ 2Z_2),$$

其中 $I+Z_1$必是非异的. 而此变换在 $\mathfrak{V}(1,2,\cdots,m)$的局部坐标表示为

$$W_1=(I+Z_1)^{-1}(I-Z_1),\ W_2=2(I+Z_1)^{-1}Z_2. \tag{6.2.7}$$

这把 $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 一一地映为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 的有理映照. 易见有恒等式

$$\begin{aligned}I-WW^{\dagger}&=I-W_1W_1^{\dagger}-W_2W_2^{\dagger}\\&=4(I+Z_1)^{-1}\left(\frac{Z_1+Z_1^{\dagger}}{2}-Z_2Z_2^{\dagger}\right)(I+Z_1^{\dagger})^{-1}.\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

如§5.1中证明(5.1.22)～(5.1.30)的方法一样,只要把实矩阵改为复矩阵,便可以证明线性变换

$$\begin{aligned}Z_1&=A^{\dagger}(T_1+iH-2T_2B^{\dagger}+BB^{\dagger})A,\\Z_2&=A^{\dagger}(T_2-B),\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

其中 A、B、H 分别为 $m\times m$、$m\times(n-m)$、$m\times m$ 复矩阵,A 非异,$H^{\dagger}=H$,把 $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 一一地映为自身,此变换可写为

$$(I,Z_2,Z_1)=A^{\dagger}(I,T_2,T_1)\begin{pmatrix}A^{\dagger-1}&-B&(BB^{\dagger}+iH)A\\0&I&-2B^{\dagger}A\\0&0&A\end{pmatrix}, \tag{6.2.10}$$

并且 $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 在这些变换所成的群下是可递的. 特别取 $T_1=I$,$T_2=0$,方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{mm}\end{pmatrix}\text{中 } a_{11},\cdots,a_{mm}\text{ 为正}. \tag{6.2.11}$$

则(6.2.9)与(6.2.10)分别化为

$$Z_1=A^{\dagger}(I+BB^{\dagger}+iH)A,\ Z_2=-A^{\dagger}B \tag{6.2.12}$$

与

$$(I,Z_2,Z_1)=A^{\dagger}(I,0,I)\begin{pmatrix}A^{\dagger-1}&-B&(BB^{\dagger}+iH)A\\0&I&-2B^{\dagger}A\\0&0&A\end{pmatrix}. \tag{6.2.13}$$

把(6.2.13)右端方阵所成的群 $\Gamma(\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}(m,n))$ 的元素一一地映为

$\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}(m,n)$，$(A,B,H)$，其中 A 为(6.2.11)的形式，$H=H^{\dagger}$，称为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的 Z 点的内切超圆坐标，即

$$
\begin{aligned}
W &= (W_1, W_2),\\
W_1 &= [I + A^{\dagger}(I + BB^{\dagger} + iH)A]^{-1}\\
&\quad \times [I - A^{\dagger}(I + BB^{\dagger} + iH)A], \qquad (6.2.14)\\
W_2 &= -2[I + A^{\dagger}(I + BB^{\dagger} + iH)A]^{-1}A^{\dagger}B,
\end{aligned}
$$

因为当 A 固定时，上式可以写为

$$
\begin{aligned}
&[W_1 + A^{\dagger}(I + AA^{\dagger})^{-1}A](I + A^{\dagger}A)\\
&\quad \times [W_1 + A^{\dagger}(I + AA^{\dagger})^{-1}A]^{\dagger} + W_2W_2^{\dagger}\\
&= (I + A^{\dagger}A)^{-1}. \qquad (6.2.15)
\end{aligned}
$$

这是以$(-A^{\dagger}(I+AA^{\dagger})^{-1}A,0)$为中心的超圆. 内切于超球 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的特征流形的$(-I,0)$点. 当 A 过所有(6.2.11)形式的方阵时，由(6.2.15)定义的超圆簇把 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$盖过一次且仅仅一次.

在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$中有不变度量

$$
\mathrm{d}s^2 = \mathrm{tr}[(I - ZZ^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}Z(I - Z^{\dagger}Z)^{-1}\mathrm{d}Z^{\dagger}], \qquad (6.2.16)
$$

对它乘以$(m+n)$，便是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的 Bergman 度量(见《典》著中§ 3.3)，故 $\mathrm{d}s^2$在域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的全纯自同构群 Aut $(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n))$下是不变的，相应于此度量的 Laplace-Beltrami 算子为

$$
\begin{aligned}
\Delta = &\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{jk} - \sum_{\gamma=1}^{n} z_{j\gamma}\bar{z}_{k\gamma}\right)\\
&\times \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{m} z_{l\alpha}\bar{z}_{l\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_{j\alpha}\partial \bar{z}_{k\beta}}. \qquad (6.2.17)
\end{aligned}
$$

这是在 Aut $(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n))$下不变的微分算子.

我们可以用§ 5.3的方法，把此 Laplace-Beltrami 算子用内切超圆坐标(A,B,H)表示出来，即令

$$
a_{11} = e^{u^1}, \cdots, a_{mm} = e^{u^m}, \text{其他坐标为 } u^{m+1}, \cdots, u^{2mn}.
$$

把 A、B、H 的其他独立元素按适当的次序排列，则 Δ 对此坐标可

写为

$$\Delta = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L},$$

其中 $\mathfrak{L}_0$是 $u^1,\cdots,u^m$ 的常系数的二阶椭圆型偏微分算子；

$$\mathfrak{L} = \sum_{\alpha=m+1}^{2mn} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} M_\alpha \tag{6.2.18}$$

是全微分算子，M_α 是一阶线性偏微分算子. 我们可以用热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathfrak{L}_0 f$$

的热核 $h_0(u^1,\cdots,u^m,t)$通过§5.4的积分变换方法，构造出热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

的热核 $H(Z,W,t)$来. 不过，$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的热核已经用另外的方法构造出来了(见文献[52])，因为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$的算子 Δ 用伪测地坐标表示出来时，有它的特殊性质，即当 $h=h(r_1,\cdots,r_m,t)$是只包含径向部分 $r_1,\cdots,r_m$ 及 t 的函数时，

$$\Delta h = \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mathrm{sh}^{2n-2m+1} r_j \mathrm{ch}\, r_j} \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} \times \left[\omega_0^2 \mathrm{sh}^{2n-2m+1} r_j \mathrm{ch}\, r_j \frac{\partial h}{\partial r_j}\right], \tag{6.2.19}$$

其中

$$\omega_0(r_1,\cdots,r_m) = \prod_{j<k} (\mathrm{sh}^2 r_j - \mathrm{sh}^2 r_k). \tag{6.2.20}$$

利用文献[66]中的结果，有

$$\frac{1}{\omega_0}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \omega_0 = c_0(m,n) = \frac{2m(m-1)(3n-m+2)}{3}, \tag{6.2.21}$$

其中

$$\Delta_j = \frac{1}{\mathrm{sh}^{2n-2m+1} r_j \mathrm{ch}\, r_j} \cdot \frac{\partial}{\partial r_j}\left[\mathrm{sh}^{2n-2m+1} r_j \mathrm{ch}_j \frac{\partial}{\partial r_j}\right], \tag{6.2.22}$$

使热方程$\frac{\partial f}{\partial t}=\Delta f$ 化为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_0 h) = \sum_{j=1}^{m}\Delta_j(\omega_0 h) - c_0(m,n)(\omega_0 h), \quad (6.2.23)$$

这是分离变数的方程,对每一个热方程

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = \Delta_j h_j \quad (6.2.24)$$

用文献[47]中构造超球$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(1,n)$的热核的方法,在$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(1,n-m+1)$中用内切超圆坐标把方程(6.2.24)化为

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial u_j^2} + 2(n-m+1)\frac{\partial f_j}{\partial u_j}, \quad (6.2.25)$$

此方程有热核 f_j 并且有解

$$f_{n-m-1}^{(k)}(u_j,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(n-m+1)u_j} \times e^{-(n-m+1)^2 t}\left(-\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^k \frac{\partial f_j}{\partial u_j}. \quad (6.2.26)$$

用文献[57]中的积分变换

$$h_{n-m+1}^{(k)}(u_j,t) = \frac{1}{\pi^{n-m+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{-1}{\mathrm{sh}2\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) \times \left(-\frac{1}{\mathrm{sh}\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{n-m} f_{n-m+1}^{(k)}(\sigma,t)\right]_{\mathrm{ch}^2\sigma=\mathrm{ch}^2 u_j+\tau^2}\mathrm{d}\tau,$$

这是方程(6.2.25)的解,则

$$\hat{h}(r_1,\cdots,r_m,t) = \frac{1}{c}\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{m}\delta_{j_1\cdots j_m}^{1\cdots m} h_{n-m+1}^{(0)}(r_{j_1},t) \cdots h_{n-m+1}^{(2m-2)}(r_{j_{m1}},t)$$

是热方程(6.2.22)的解, c 是任意非零常数. 故

$$h = \frac{1}{c\omega_0}\hat{h}(r_1,\cdots,r_m,t) \quad (6.2.27)$$

是热方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h \quad (6.2.28)$$

的解. 我们证明,可选取适当的常数 c,使

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}}\varphi(Z)h(r_1(Z,W),\cdots,r_m(Z,W,t))\dot{Z}=\varphi(W),\tag{6.2.29}$$

即 $h(r_1(Z,W),\cdots,r_m(Z,W),t)$ 是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 的热核.

后来洪毅等人[48]用此法构造了一批对称空间的热核,但远非所有对称空间不变黎曼度量的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 的伪测地坐标表示的径向部分皆能够化为可分离变数的方程,还有更大一批对称空间不能用此法构造其热核,例如上一章的实典型域便是如此. 我们在这里不准备重复已构造了热核的对称空间的情形,例如关于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,n)$ 的讨论到此为止.

我们在此只讨论典型域

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)=\{W\in\mathrm{C}^{m\times m}\mid I-WW^{\dagger}>0,W=W'\}\tag{6.2.30}$$

的情形. 至于其余对称空间的热核的构造,正在有人或者在构造中,或者已构造出来(如李庆忠的博士论文).

由(6.2.30)可见,$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 是过原点的复超平面

$$W-W'=0\tag{6.2.31}$$

与标准超球 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,m)$ 的交,根据定义,$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 也是一个超球. 此时变换(6.2.7)化为

$$W=(I+Z)^{-1}(I-Z).\tag{6.2.32}$$

当 $W=W'$ 时,显然有 $Z\doteq Z'$. 而(6.2.8)化为

$$I-WW^{\dagger}=2(I+Z)^{-1}(Z+Z^{\dagger})(I+Z^{\dagger})^{-1}.\tag{6.2.33}$$

因此,变换(6.2.32)把

$$\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}(m)=\{Z\in\mathrm{C}^{m\times m}\mid Z+Z^{\dagger}>0,Z=Z'\}$$

一一地映为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$. 它的度量可以由 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m,m)$ 的不变度量限制在复超平面上,而得

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}s^2=\mathrm{tr}[(I-WW^{\dagger})^{-1}\mathrm{d}W(I-W^{\dagger}W)^{-1}\mathrm{d}W^{\dagger}],\\&W=W'.\end{aligned}\tag{6.2.34}$$

这与 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 的 Bergman 度量只差一个因子 $m+1$（见《典》著中 § 3.3），故此度量在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 的全纯自同构群 Aut $(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$ 下是不变的. 经变换(6.2.32)，此度量化为 $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}(m)$ 的不变度量

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{tr}[(Z+Z^\dagger)^{-1}\mathrm{d}Z(Z+Z^\dagger)^{-1}\mathrm{d}Z^\dagger],\ Z=Z'. \tag{6.2.35}$$

$\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}(m)$ 在下面的线性变换下不变：

$$Z = A'(T+iS)A,\ S=S' \text{ 为实阵，}$$
$$A \text{ 为实上三角方阵，对角线上元素为正.} \tag{6.2.36}$$

并且 $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}(m)$ 在这些变换下为可递. 此变换可写为

$$(I,Z) = A'(I,T)\begin{pmatrix} A'^{-1} & iSA \\ 0 & A \end{pmatrix}. \tag{6.2.37}$$

上式右端的方阵成一个群 $\Gamma(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$.

在(6.2.36)中取 $T=I$，变换

$$Z = A'(I+iS)A \tag{6.2.38}$$

把 $\Gamma(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(Z))$ 一一地映为 $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}(m)$，而变换

$$W = [I+A'(I+iS)A]^{-1}[I-A'(I+iS)A] \tag{6.2.39}$$

把 $\Gamma(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$ 一一地映为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$. (A,S) 成为 W 点的内切超圆坐标.

由(6.2.38)知

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z &= \mathrm{d}A'(I+iS)A + A'(I+iS)\mathrm{d}A + iA'\mathrm{d}SA' \\ &= A'[\delta A + \delta A' + i(\mathrm{d}S + S\delta A + \delta A'S)]A, \\ \delta A &= \mathrm{d}A\cdot A^{-1}. \end{aligned} \tag{6.2.40}$$

由于

$$Z+\overline{Z} = Z+Z^\dagger = 2A'A,$$

度量(6.2.35)的内切超圆坐标表示为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\{[(\delta A+\delta A') + i(\mathrm{d}S + S\delta A + \delta A'S)] \\ &\quad \times [(\delta A+\delta A') - i(\mathrm{d}S + S\delta A + \delta A'S)']\} \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}[(\delta A+\delta A')^2] + \frac{1}{4}\mathrm{tr}[(\mathrm{d}S + S\delta A + \delta A'S)^2] \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{m(m+1)} h_{\alpha\beta}(u)\mathrm{d}u^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}, \tag{6.2.41}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} e^{u_1} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & e^{u_2} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{u_m} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1m} & s_{2m} & \cdots & s_{mm} \end{pmatrix} \tag{6.2.42}$$

及

$$\begin{aligned} u &= (u^1, \cdots, u^{m(m+1)}) \\ &= (u_1, \cdots, u_m, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1m}, a_{23}, a_{24}, \cdots, a_{2m}, \cdots, \\ & a_{m-1,m}, s_{11}, s_{22}, \cdots, s_{mm}, s_{12}, s_{13}, \cdots, s_{1m}, \cdots, s_{m-1,m}). \end{aligned} \tag{6.2.43}$$

设

$$\sigma = \begin{pmatrix} A'^{-1} & iSA \\ 0 & A \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} A_1'^{-1} & iS_1A_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= \begin{pmatrix} (AA_1)'^{-1} & (S + A'^{-1}S_1A^{-1})(AA_1) \\ 0 & AA_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{A}'^{-1} & i\widetilde{S}\widetilde{A} \\ 0 & \widetilde{A} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.2.44}$$

其中

$$\widetilde{A} = AA_1, \ \widetilde{S} = S + A'^{-1}S_1A^{-1}. \tag{6.2.45}$$

当 $\tau = \sigma^{-1}$ 时,

$$A_1 = A^{-1}, \ S_1 = -A'SA. \tag{6.2.46}$$

根据引理5.3.1,要计算(6.2.41)的度量方阵

$$H(\sigma) = (h_{jk}(\sigma))_{1 \leqslant j,k \leqslant m(m+1)}$$

的值,要先计算

$$\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]^{-1}_{\tau=\sigma^{-1}}$$

的值. 由(6.2.45)知

$$\mathrm{d}\widetilde{A} = \mathrm{d}A \cdot A_1,$$

$$\mathrm{d}\widetilde{S} = \mathrm{d}S - A'^{-1}S_1A^{-1}\delta A - \delta A'A'^{-1}S_1A^{-1}. \quad (6.2.47)$$

以(6.2.46)代入,得

$$\mathrm{d}\widetilde{A} = \mathrm{d}AA^{-1},\ \mathrm{d}\widetilde{S} = \mathrm{d}S + S\delta A + \delta A'S,$$

或者

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\widetilde{A}A,\ \mathrm{d}S = \mathrm{d}\widetilde{S} - S\mathrm{d}\widetilde{A} - \delta\widetilde{A}'S. \quad (6.2.48)$$

故

$$\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]^{-1}_{\tau=\sigma^{-1}} = \frac{\partial(a,s)}{\partial(\tilde{a},\tilde{s})} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tilde{a}} & \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{a}} \\ \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tilde{s}} & \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}} \end{pmatrix}. \quad (6.2.49)$$

由(6.2.48)知

$$\mathrm{d}a_{pp} = \mathrm{d}\tilde{a}_{pp}a_{pp},\ p = 1,\cdots,n;$$

$$\mathrm{d}a_{pq} = \sum_{l=1}^{m}\mathrm{d}\tilde{a}_{pl}a_{lq}$$

$$= \mathrm{d}\tilde{a}_{pp}a_{pq} + \mathrm{d}\tilde{a}_{pq}a_{qq} + \sum_{l=p+1}^{q-1}\mathrm{d}\tilde{a}_{pl}a_{lq}\quad (\text{当 } p < q). \quad (6.2.50)$$

亦即

$$\mathrm{d}u_p = \mathrm{d}\tilde{a}_{pp},$$

$$\mathrm{d}a_{pq} = \mathrm{d}\tilde{a}_{qq}a_{pq} - \mathrm{d}\tilde{a}_{pq}e^{u_p} + \sum_{l=p+1}^{q-1}\mathrm{d}\tilde{a}_{pl}a_{lq}. \quad (6.2.51)$$

特别是,当 $p<q$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}a_{pq}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jj}} = a_{pq}\delta_{jq}, \quad (6.2.52)$$

$\dfrac{\mathrm{d}a_{pq}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jk}}$是 a_{pl}的一次项或0(当 $j<k$ 时). 同样,由(6.2.48)第二式知

$$\mathrm{d}s_{pq} = \mathrm{d}\tilde{s}_{pq} - \sum_{l=1}^{m}s_{pl}\mathrm{d}\tilde{a}_{lq} - \sum_{l=1}^{m}\mathrm{d}\tilde{a}_{lp}s_{lq}$$

$$= \mathrm{d}\tilde{s}_{pq} - \mathrm{d}\tilde{a}_{pq}s_{pq} - \mathrm{d}\tilde{a}_{qq}s_{pq} - \sum_{l=1}^{q-1}\mathrm{d}\tilde{a}_{lq}s_{pl} - \sum_{l=1}^{p-1}\mathrm{d}\tilde{a}_{lp}s_{lq},$$

特别是

$$\frac{\mathrm{d}s_{pq}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jj}} = -(\delta_{jp} + \delta_{jq})s_{pq},$$

$$\frac{\mathrm{d}s_{pq}}{\mathrm{d}\tilde{a}_{jk}} \text{ 是 } s_{pl} \text{ 的单项式或为 } 0. \tag{6.2.53}$$

由(6.2.51)知

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tilde{a}} = \begin{pmatrix} I^{(m)} & R_1 \\ 0 & \Gamma_1 \end{pmatrix},$$

R_1 是 $a_{pq}(p < q)$ 的单项式或为 0.

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} e^{u_1} & & & & \\ & \ddots & & * & \\ & & e^{u_i} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & e^{u_{m-1}} \end{pmatrix},$$

$$\det\Gamma_1 = \exp\sum_{j=1}^{m}(m-j)u_j,$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tilde{s}} = 0. \tag{6.2.54}$$

由(6.2.53)知

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{a}} \text{ 是 } s_{pq} \text{ 的单项式或为 } 0. \text{记为} \begin{pmatrix} R_2 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}} = I.$$

因此

$$\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]^{-1}_{\sigma=\tau^{-1}} = \begin{pmatrix} I & R_1 & R_2 \\ 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ \frac{m(m-1)}{2} \\ \frac{m(m+1)}{2} \end{matrix}. \tag{6.2.55}$$

此外，当 $A=I$，$S=0$，(6.2.41)为

$$\begin{aligned}ds^2&=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(dA+dA')^2]+\frac{1}{4}\mathrm{tr}[dS^2]\\&=\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{m}(da_{jk}+da_{kj})^2+\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{m}ds_{jk}^2\\&=\sum_{j=1}^{m}da_{jj}^2+\frac{1}{2}\sum_{j<k}da_{jk}^2+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}ds_{jj}^2+\frac{1}{2}\sum_{j<k}ds_{jk}^2,\end{aligned}$$

故

$$H(e)=I^{(m)}\oplus\frac{1}{2}I^{\frac{1}{2}m(m-1)}\oplus\frac{1}{4}I^{(m)}\oplus\frac{1}{2}I^{\frac{1}{2}m(m-1)}.\tag{6.2.56}$$

根据定理5.3.1，有

$$\begin{aligned}H(\sigma)^{-1}&=\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}^{\prime-1}[H(e)]^{-1}\left[\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\sigma}\right]_{\tau=\sigma^{-1}}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}I&R_1&R_2\\R_1'&R_1'R_1+2\Gamma_1'\Gamma_1&R_1'R_2+2\Gamma_1'\Gamma_2\\R_2'&R_2'R_1+2\Gamma_2'\Gamma_1&R_2'R_2+2\Gamma_2'\Gamma_2+\Lambda_0\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{6.2.57}$$

其中 $\Lambda_0=4I^{(m)}\oplus 2I^{\frac{1}{2}m(m-1)}$.

此外，令

$$\begin{aligned}\varphi_0^2&=\det H(u)=(\det\Gamma_1^{-1})^2\\&=2^{-m(m+1)}\exp\left[-2\sum_{j=1}^{m}(m-j)u_j\right].\end{aligned}\tag{6.2.58}$$

由(6.2.55)、(6.2.56)、(6.2.57)可知

$$h^{j\beta}=h^{\beta j}(\text{当 } j=1,\cdots,m;\ \beta=m+1,\cdots,m(m+1)\text{ 时})$$

是 $a_{pq}(p<q)$，或是 $s_{jk}(j\leqslant k)$的单项式或者为0. 并且由(6.2.56)与(6.2.51)有

$$\begin{aligned}h^{j\beta}(u)&=\sum_{\lambda,\mu=1}^{m(m+1)}h^{\lambda\mu}(0)\frac{du^j}{d\tilde{u}^\lambda}\cdot\frac{du^\beta}{d\tilde{u}^\mu}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{du^j}{d\tilde{a}_{kk}}\cdot\frac{du^\beta}{d\tilde{a}_{kk}}=\frac{du^\beta}{d\tilde{a}_{jj}},\end{aligned}$$

因此由(6.2.52)与(6.2.53)有

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=m+1}^{m(m+1)}\frac{\partial h^{j\beta}(u)}{\partial u^{\beta}}&=\sum_{\beta=1}^{m(m+1)}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\cdot\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}\widetilde{a}_{jj}}.\\&=\sum_{p<q}\frac{\partial}{\partial a_{pq}}\left(\frac{\mathrm{d}a_{pq}}{\mathrm{d}\widetilde{a}_{jj}}\right)+\sum_{p\leqslant q}\frac{\partial}{\partial s_{pq}}\cdot\frac{\mathrm{d}s_{pq}}{\mathrm{d}a_{jj}}\\&=\sum_{p<q}\delta_{jq}-\sum_{p\leqslant q}(\delta_{jp}+\delta_{jq})\\&=\sum_{p<j}1-\sum_{j\leqslant q}1-\sum_{p\leqslant j}1\\&=(j-1)-(m-j+1)-j\\&=-(m-j+2).\end{aligned}\tag{6.2.59}$$

重复(5.3.63)～(5.3.68)的计算可知

$$\Delta f=\mathfrak{L}_0 f+\mathfrak{L}f,\tag{6.2.60}$$

其中

$$\mathfrak{L}_0 f=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j^2}+2\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}-\sum_{j=1}^{m}(m-j)(m-j+2)f,\tag{6.2.61}$$

$$\mathfrak{L}f=\sum_{\alpha=m+1}^{m(m+1)}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}M_{\alpha}f,\tag{6.2.62}$$

$$M_{\alpha}f=\sum_{j=1}^{m}h^{j\alpha}\left[2\frac{\partial f}{\partial u_j}-(m-j)f\right]+\sum_{\beta=m+1}^{m(m+1)}h^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial u^{\beta}}.\tag{6.2.63}$$

引理6.2.1 热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\mathfrak{L}_0 f$$

在 $\mathbb{R}^m$ 的热核为

$$h_0(u_1,\cdots,u_m,t)=\frac{1}{(\sqrt{\pi t})^m}e^{-(c_m+m)t}\prod_{j=1}^{m}f_1(u_j,t),$$

其中

$$c_m=\sum_{j=1}^{m}(m-j)(m-j+2),\ f_1(r,t)=e^{-\frac{1}{4t}r^2-r}.$$

这是可以直接验算的.

现在令

$$h(r_1,\cdots,r_m,t)$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}T^1_{r_{j_1}}T^3_{r_{j_2}}\cdots T^{2m-1}_{r_{j_m}}h_0(r_1,\cdots,r_m,t),\quad(6.2.64)$$

其中T_r的定义见(5.4.21).

取$r_1,\cdots,r_m$为$Z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$的伪测地坐标的径向部分,即

$$Z=U\begin{pmatrix}\mathrm{th}\ r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{th}\ r_m\end{pmatrix}U',\qquad(6.2.65)$$

其中U为m阶酉方阵.根据《典》著的(3.3.40),由原点到Z的测地线长度为

$$r(Z,0)=[r_1^2+\cdots+r_m^2]^{\frac{1}{2}}.\qquad(6.2.66)$$

由于$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$中任两点的测地线长度$r(Z,W)$是经全纯自同构不变的,即

$$r(\tau Z,\tau W)=r(Z,W),\ \tau\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)),\quad(6.2.67)$$

特别是

$$r(UZU',0)=r(Z,0),\qquad(6.2.68)$$

即如令

$$r_j=r_j(Z,0),\ j=1,\cdots,m,\qquad(6.2.69)$$

则

$$r_1(UZU',0),\cdots,r_m(UZU',0)$$

可能有一次序的排列,即上式可能分别等于

$$r_{j_1}(Z,0),\cdots,r_{j_m}(Z,0),$$

其中$(j_1,\cdots,j_m)$是$(1,\cdots,m)$的一个排列.

原点为中心的Z点的伪测地坐标是指(6.2.65)的$r_1,\cdots,r_m$与m阶酉方阵U的(局部)坐标一起而言的,其中$r_1,\cdots,r_m$称为径向部分,我们要证明

$$H(Z,W,t)=\frac{1}{c(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m))}h(r_1(Z,W),\cdots,r_m(Z,W),t)$$

(6.2.70)

是热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\Delta f \tag{6.2.71}$$

的热核，即$H(Z,W,t)=H(W,Z,t)$对Z适合以上方程，并且适当选取常数$c(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$，便有

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)}\varphi(Z)H(Z,W,t)\dot{Z}=\varphi(W) \tag{6.2.72}$$

对任一在$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$连续并有界的函数$\varphi(Z)$. 这里$\dot{Z}$是$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$的不变度量的体积元素，即

$$\dot{Z}=\frac{1}{\det(I-ZZ^{\dagger})^{n+1}}\prod_{j=1}^{m}\prod_{\alpha=1}^{n}\frac{\mathrm{d}z_{j\alpha}\wedge\overline{\mathrm{d}a_{j\alpha}}}{2i}. \tag{6.2.73}$$

为此首先要证

$$c(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))=\lim_{t\to+0}\int h(r_1(Z,W),\cdots,r_m(Z,W),t)\dot{Z} \tag{6.2.74}$$

与W无关并且不为0，其次要计算$\dot{Z}$的伪测地坐标表示. 这将在下节证明.

§6.3 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$的热核

先计算$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$的对于伪测地坐标的体积元素. 任一$m\times m$复对称方阵$Z$，必有$m$阶酉方阵$U$使得(见《典》著附录)$Z$可写为对称方阵极坐标的形式

$$Z=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{bmatrix}U',\quad \lambda_1,\cdots,\lambda_m\text{ 非负}, \tag{6.3.1}$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$与$U$的(局部)坐标称为$Z$对称方阵的极坐标，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$是径向部分. 当$Z\in\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$时，有$\lambda_j<1$，令

$$\lambda_j=\operatorname{th}r_j\text{ 或 }r_j=\frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j},\quad j=1,\cdots,m. \tag{6.3.2}$$

上节已讲过$r_1,\cdots,r_m$与U的坐标称为$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$的以原点为中心的

伪测地坐标，$r_1,\cdots,r_m$ 称为径向部分，因为

$$r^2=[r_1^2+\cdots+r_m^2]^{1/2}$$

是原点到 Z 点的测地距离. 令

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}, \tag{6.3.3}$$

则有

$$dZ=U(d\Lambda+\delta U\Lambda+\Lambda\delta U')U',\ \delta U=U^{-1}dU. \tag{6.3.4}$$

因此 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$的不变度量(6.2.35)在对称方阵极坐标下为

$$\begin{aligned}ds^2=&\ \mathrm{tr}[(I-\Lambda^2)^{-1}(d\Lambda+\delta U\Lambda+\Lambda\delta U')\\&\times(I-\Lambda^2)^{-1}(d\Lambda-\delta U'\Lambda-\Lambda\delta U)]\\=&\ \mathrm{tr}[(I-\Lambda^2)^{-1}d\Lambda(I-\Lambda^2)^{-1}d\Lambda]\\&+\mathrm{tr}[(I-\Lambda^2)^{-1}(\delta U\Lambda+\Lambda\delta U')\\&\times(I-\Lambda^2)^{-1}(\delta U\Lambda+\Lambda\delta U')^{\dagger}]\\=&\sum_{j=1}^m\frac{d\lambda_j^2}{(1-\lambda_j^2)^2}+\sum_{j,k=1}^m\left|\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_j^2}}\right.\\&\left.\times(\delta u_{jk}\lambda_k+\lambda_j\delta u_{kj})\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k^2}}\right|^2,\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

其中 $\delta U=(\delta u_{jk})$. 由于 $\delta U^{\dagger}=-\delta U$，可令

$$\delta u_{jj}=i\psi_{jj},\ \delta u_{jk}=\varphi_{jk}+i\psi_{jk},$$

$$\varphi_{jk}=-\varphi_{kj},\ \psi_{jk}=\psi_{kj},$$

其中 φ_{jk}与 ψ_{jk}皆为实的一次式，它们一起构成了 m 阶酉群 $U(m)$的一组协标架. (6.3.5)对此协标架可写为

$$\begin{aligned}ds^2=&\sum_{j=1}^m dr_j^2+\sum_{j=1}^m\left(\frac{2\lambda_j}{1-\lambda_j^2}\right)^2\psi_{jj}^2\\&+2\sum_{j<k}\left|\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)}}\right.\\&\left.\times[(\lambda_k-\lambda_j)\varphi_{jk}+i(\lambda_k+\lambda_j)\psi_{jk}]\right|^2\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{d}r_j^2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{4\lambda_j^2}{(1-\lambda_j^2)^2}\psi_{jj}^2$$

$$+ 2\sum_{j<k} \frac{(\lambda_j-\lambda_k)^2}{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)}\varphi_{jk}^2$$

$$+ 2\sum_{j<k} \frac{(\lambda_j+\lambda_k)^2}{(1-\lambda_j^2)(1-\lambda_k^2)}\psi_{jk}^2. \qquad (6.3.6)$$

因此,对于度量 $\mathrm{d}s^2$的伪测地坐标的体积元素为

$$\dot{Z} = \left\{2^{m(m+1)}\prod_{j=1}^{m}\frac{4\lambda_j^2}{(1-\lambda_j^2)^2}\prod_{j<k}\frac{(\lambda_j^2-\lambda_k^2)^2}{(1-\lambda_j^2)^2(1-\lambda_k^2)^2}\right\}^{1/2}$$

$$\times \mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_m\prod_{j=1}^{m}\psi_{jj}\prod_{j<k}(\varphi_{jk}\psi_{jk})$$

$$= 2^{\frac{1}{2}m(m-1)}\prod_{j=1}^{m}\mathrm{sh}2r_j\left|\prod_{j<k}(\mathrm{sh}^2r_j-\mathrm{sh}^2r_k)\right|$$

$$\times \psi_0(\theta)\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_m\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{m^2}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}m(m-1)}\left|\omega_0(r_1,\cdots,r_m)\right|$$

$$\times \prod_{j=1}^{m}\mathrm{sh}2r_j\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_m\psi_0(\theta)\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{m^2}, \qquad (6.3.7)$$

其中 $\theta_1,\cdots,\theta_{m^2}$是酉群 $U(m)$的局部坐标

$$\psi_0(\theta) = \psi_0(\theta_1,\cdots,\theta_{m^2}) \text{ 只包含 } \theta_1,\cdots,\theta_{m^2};$$

$$\omega_0(r_1,\cdots,r_m) = \prod_{j<k}(\mathrm{sh}^2r_j-\mathrm{sh}^2r_k). \qquad (6.3.8)$$

根据(6.2.58)与(6.2.56),$\mathrm{d}s^2$对于内切超圆坐标(A,S)的体积元素为

$$\dot{Z} = 2^{\frac{1}{2}m(m+1)}\varphi_0(u)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{m(m+1)},$$

$$\varphi_0(u) = \exp\left[-\sum_{j=1}^{m}(m-j)u_j\right]. \qquad (6.3.9)$$

令

$$A = \Lambda + \Gamma,\ \Lambda = \begin{pmatrix} e^{u_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{u_m} \end{pmatrix},$$

及

$$\dot{\Gamma} = \mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{\frac{1}{2}m(m+1)} = \prod_{p<q}\mathrm{d}a_{pq},$$

$$\dot{S} = \mathrm{d}u^{\frac{1}{2}m(m+1)+1}\cdots\mathrm{d}u^{m(m+1)}$$

$$= \prod_{j=1}^{m}\mathrm{d}s_{jj}\prod_{j<k}\mathrm{d}s_{pq} = \prod_{p\leqslant q}\mathrm{d}s_{pq}. \qquad (6.3.10)$$

如证引理5.4.1一样可证以下引理：

引理6.3.1　在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$定义的函数 $f(Z)$可写为

$$f(Z) = f_1\left(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + iA'S][A + A'^{-1} - iSA]\right)$$

的充分条件为 $f(UZU') = f(Z)$（对任一酉方阵 U）.

若 $h(Z,t) = H(Z,0,t)$是热方程(6.2.71)的热核，并假定它适合条件(5.4.36)，在其中把 n 换为 $n = m+1$，则必然适合 $h(UZU',t) = h(Z,t)$. 故它一定可写为

$$h(Z,t) = h_1\left(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + iA'S][A + A'^{-1} - iSA],t\right), \qquad (6.3.11)$$

其中(A,S)是 Z 点的内切超圆坐标.

令

$$h_2(u_1,\cdots,u_m,t)$$

$$= \frac{1}{\pi^{m^2}}\int_{\mathfrak{R}^{m^2}} h_1\left(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + iA'S] \times [A + A'^{-1} - iSA],t\right)\dot{\Gamma}\,\dot{S}$$

$$= \frac{1}{\pi^{m^2}}\int_{\mathfrak{R}^{m^2}} h_1\,\mathrm{d}u^{m+1}\cdots\mathrm{d}u^{m^2}, \qquad (6.3.12)$$

则对任一在 R^m 连续并有界的函数 $\varphi(u_1,\cdots,u_m)$，有

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Re^m}\varphi(u)\varphi_0(u)h_2(u_1,\cdots,u_m,t)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^m$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{2^{-\frac{1}{2}m(m+1)}}{\pi^{m^2}}\int_{\Re^{m(m+1)}}\varphi(u)h_1\dot{Z}$$
$$=\frac{2^{-\frac{1}{2}m(m+1)}}{\pi^{m^2}}\varphi(0). \tag{6.3.13}$$

令

$$h_3(u_1,\cdots,u_m,t)=2^{\frac{1}{2}m(m+1)}\pi^{m^2}\varphi_0(u_1,\cdots,u_m)\times h_2(u_1,\cdots,u_m,t). \tag{6.3.14}$$

根据(6.3.12)及(6.2.60)，有

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}=\frac{1}{\pi^{m^2}}\int_{\Re^{m^2}}\frac{\partial h_1}{\partial t}\dot{\Gamma}\dot{S}=\frac{1}{\pi^{m^1}}\int_{\Re^m}\mathfrak{L}_0h_1\dot{\Gamma}\dot{S}=\mathfrak{L}_0h_2. \tag{6.3.15}$$

取

$$\mathfrak{L}_1=\sum_{j=1}^m\frac{\partial^2}{\partial u_j^2}+2\sum_{j=1}^m a_j\frac{\partial}{\partial u_j}\quad(a_j=m-j+1), \tag{6.3.16}$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_0h_2)=\mathfrak{L}_1(\varphi_0h_2). \tag{6.3.17}$$

故(6.3.13)可写为

$$2^{\frac{1}{2}m(m+1)}\pi^{m^2}\lim_{t\to+0}\int_{\Re^m}\varphi(u)\times[e^{-c_1t}\varphi_0h_2(u_1,\cdots,u_m,t)]\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_m=\varphi(0). \tag{6.3.18}$$

当

$$h_2=2^{\frac{1}{2}m(m+1)}\pi^{m^2}h_0(u_1,\cdots,u_m,t), \tag{6.3.19}$$

其中 $h_0(u_1,\cdots,u_m,t)$是引理6.2.1定义的函数，则

$$2^{\frac{1}{2}m(m+1)}\pi^{m^2}\varphi_0h_0$$

适合热方程(6.3.17)及(6.3.18)，即是方程(6.3.17)的热核. 由于热核的唯一性，可得如下引理：

引理6.3.2　若

$$h_1\left(\frac{1}{4}[A'+A^{-1}+iA'S][A+A'^{-1}+iSA],t\right)$$

是$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m)$的热方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\Delta f$$

的热核$H(Z,0,t)$的内切超圆坐标表示，则必有

$$\begin{aligned}&h_2(u_1,\cdots,u_m,t)\\&=\frac{1}{\pi^{m^2}}\int_{\mathrm{R}^{m^2}}h_1\left(\frac{1}{4}[A'+A^{-1}+iA'S]\right.\\&\quad\left.\times[A+A'^{-1}-iSA],t\right)\dot{\Gamma}\dot{S},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&h_2(u_1,\cdots,u_m,t)\\&=2^{\frac{1}{2}m(m+1)}\pi^{m^2}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-(c_m+m)t}\\&\quad\times\exp\left[-\frac{1}{4t}\sum_{j=1}^m u_j^2-\sum_{j=1}^m u_j\right].\end{aligned}$$

现在就是设法从$h_a(u_1,\cdots,u_m,t)$构造出h_1来.

如证明引理5.4.4一样可证明，当h_1适合条件(5.4.36)，就有

$$\begin{aligned}&T_{r_m}^1T_{r_{m-1}}^2\cdots T_{r_1}^{2m-1}h_2(r_1,\cdots,r_m,t)\\&=h_1\left(\begin{pmatrix}\mathrm{ch}^2r_1&&\\&\ddots&\\&&\mathrm{ch}^2r_m\end{pmatrix},t\right).\end{aligned}\tag{6.3.20}$$

把它对称化，令

$$\begin{aligned}&h(r_1,\cdots,r_m,t)\\&=\frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}T_{r_{j_m}}^1T_{r_{j_{m-1}}}^3\cdots\\&\quad\times T_{r_{j_1}}^{2m-1}h_2(r_1,\cdots,r_m,t),\end{aligned}\tag{6.3.21}$$

则当

$$r_1 = r_1(X,0),\cdots;\ r_m = r_m(X,0)$$

是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m)$ 伪测地线坐标的径向部分，由于 $h(r_1,\cdots,r_m,t)$ 是 $r_1,\cdots,r_m$ 的对称函数，故能写为

$$\begin{aligned}
&h(r_1,\cdots,r_m,t)\\
&= h_1\Big(\frac{1}{4}[A' + A^{-1} + iA'S]\\
&\quad \times [A + A'^{-1} - iSA],t\Big).
\end{aligned}$$

如证定理5.4.6一样可证如下引理：

引理6.3.3 由(6.3.21)定义的 $h(r_1(Z,0),\cdots,r_m(Z,0),t)$ 适合方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h.$$

令 $\tau_W \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$ 使 $\tau_W(W)=0$，定义

$$H(Z,W,t) = \frac{1}{c(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))} h(r_1(Z,W),\cdots,r_m(Z,W),t), \tag{6.3.22}$$

其中 c 是一个非零常数，$r_j(Z,W)$ 定义为

$$r_j(Z,W) = r_j(\tau_W(Z),0).$$

对任一 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$，考虑 $\tau_{\sigma(W)}(\sigma(Z))$. 由于 $\tau_{\sigma(W)}(\sigma(W))=0$，变换 $\tau_{\sigma(W)} \circ \sigma \circ \tau_W^{-1}$ 把原点变为原点. 因此有

$$\tau_{\sigma(W)}(\sigma(Z)) = U\tau_W(Z)U',\ U \text{ 为酉方阵}.$$

这证明了

$$H(\sigma(Z),\sigma(W),t) = H(Z,W,t),\ \forall\, \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m)). \tag{6.3.23}$$

其次，我们要证明

$$H(Z,W,t) = H(W,Z,t). \tag{6.3.24}$$

此即要证

$$H(\tau_W(Z),0,t) = H(\tau_Z(W),0,t). \tag{6.3.25}$$

实际上，对任一 $\sigma\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})$，有

$$H(\tau_W(Z),0,t) = H(\tau_{\sigma(W)}(\sigma(Z)),0,t). \qquad (6.3.26)$$

我们令 $M\in \mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$为 Z 到 W 的测地线的中点，即 Z 到 M 与 M 到 W 的测地线弧长相等. 令

$$\iota: T \to -T,$$

则 $\iota^2=e$（恒同）. 由于变换 $\sigma_M^{-1}\circ\iota\circ\sigma_M$ 适合$(\sigma_M^{-1}\circ\iota\circ\sigma_M)^2=e$，设

$$\sigma_M(Z) = Z_1,$$

则

$$\iota\circ\sigma_M(Z) = -Z_1.$$

由于0点到 Z_1点与到 $-Z_1$点的测地线以0点为中点，σ_M^{-1}使此测地线变为由 Z 到 W 的测地线，把0点变为 M 点. 此变换使测地线距离不变，故必有

$$\sigma_M^{-1}\circ\iota\circ\sigma_M(Z) = W.$$

其逆变换也是 $\sigma_M^{-1}\circ\iota\circ\sigma_M$，故

$$\sigma_M^{-1}\circ\iota\circ\sigma_M(W) = Z.$$

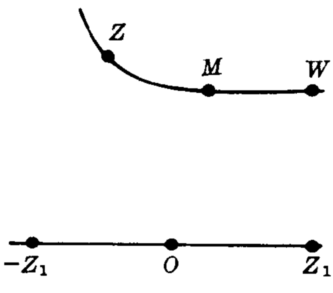

图 6.1

令 $\sigma=\sigma_M^{-1}\circ\iota\circ\sigma_M$. 则由

$$\begin{aligned} H(\tau_W(Z),0,t) &= H(\tau_{\sigma(W)}(\sigma(Z)),0,t) \\ &= H(\tau_Z(W),0,t), \end{aligned}$$

得出(6.3.24).

此外，Δ 在 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m))$下不变，从而有

$$\Delta_Z = \Delta_{\tau_W(Z)},$$

故

$$\Delta_Z H(Z,W,t)=\Delta_{\tau_W(Z)}H(\tau_W(Z),0,t)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}H(Z,W,t).\qquad(6.3.27)$$

引理6.3.4　$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 中的任意两点 Z 与 W 必存在 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$，使得 $\sigma(Z)=W$ 与 $\sigma(W)=Z$.

定理6.3.5　设 $H(Z,W,t)$ 是由(6.3.22)定义的函数，则有

(i) $H(\sigma(Z),\sigma(W),t)=H(Z,W,t)$，$\forall\ \sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})$；

(ii) $H(Z,W,t)=H(W,Z,t)$；

(iii) $\frac{\partial}{\partial t}H(Z,W,t)=\Delta_W H(Z,W,t)$

$$=\Delta_Z H(Z,W,t).$$

要证明 $H(Z,W,t)$ 是热核，还须要证明以下定理：

定理6.3.6　由(6.3.22)定义的函数 $H(Z,W,t)$ 可适当选取常数 $c(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))$，使得

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m)}\varphi(Z)H(Z,W,t)\dot{Z}=\varphi(W),$$

其中 $\varphi(Z)$ 是在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 连续并有界的函数，

$$c(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m))=\lim_{t\to+0}\int_{\mathfrak{R}}h(r_1(Z,W),\cdots,r_m(Z,W),t)\dot{Z}.$$

证　正如§5.5所证的一样，只需证明

$$c(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m))=\lim_{t\to0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(m)}h(r_1,\cdots,r_m,t)\dot{Z}\qquad(6.3.28)$$

不为0便足够了，其中 h 由(6.3.21)定义．由此及(6.3.7)知

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)}h(r_1,\cdots,r_m,t)\dot{Z}$$

$$=2^{-\frac{1}{2}m(m-1)}\frac{1}{m!}\sum_{(j_1,\cdots,j_m)}\int_0^\infty\cdots$$

$$\times\int_0^\infty\left|\omega_0(r_1,\cdots,r_m)\right|\prod_{j=1}^m\mathrm{sh}2r_j\frac{1}{(\sqrt{\pi t})^m}$$

$$\times e^{-c_1t}\prod_{k=1}^m\mathrm{T}_r^{2k-1}{}_{j_k}f_1(r_{j_k},t)\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_m$$

$$\times \int_{U(m)} \psi_0(\theta) \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{m^2}, \qquad (6.3.29)$$

其中
$$c_1 = \sum_{j=1}^{m} (m-j)(m-j+2) + m,$$

$$f_1(r,t) = \exp\left[-\frac{1}{4t}r^2 - r\right].$$

作变换

$$r_1 = 2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, r_m = 2\sqrt{t}\, s_m, \qquad (6.3.30)$$

并令

$$F_k(r,t) = T_r^k f_1(r,t) \qquad (6.3.31)$$

与

$$v_0 = \int_{U(m)} \psi_0(\theta) \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{m^2}. \qquad (6.3.32)$$

这是酉群$U(m)$的体积,则(6.3.29)可写为

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)} h(r_1, \cdots, r_m, t) \dot{Z} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}m(m-1)} \frac{v_0}{m!} \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-ct} \sum_{(j_1, \cdots, j_m)} \int_0^\infty \cdots \\
&\quad \times \int_0^\infty \left| (2\sqrt{t})^{-m(m-1)} \omega_0(2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, 2\sqrt{t}\, s_m) \right| \\
&\quad \times \prod_{j=1}^m s_j \frac{\mathrm{sh} 4\sqrt{t}\, s_j}{4\sqrt{t}\, s_j} \prod_{k=1}^m (2\sqrt{t})^{2k-1} \\
&\quad \times F_{2k-1}(2\sqrt{t}\, s_{j_k}, t) \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_r \\
&= 2^{\frac{1}{2}m(m-1)} \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)^m v_0 e^{-c_1 t} \int_0^\infty \cdots \\
&\quad \times \int_0^\infty |(2\sqrt{t})^{-m(m-1)}| \omega_0(2\sqrt{t}\, s_1, \cdots, 2\sqrt{t}\, s_m) \\
&\quad \times \prod_{j=1}^m s_j \frac{\mathrm{sh} 4\sqrt{t}\, s_j}{4\sqrt{t}\, s_j} \prod_{j=1}^m (2\sqrt{t})^{2j-1} \\
&\quad \times F_{2j-1}(2\sqrt{t}\, s_j, t) \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_m.
\end{aligned} \qquad (6.3.33)$$

根据(5.5.5)、(5.5.9)、(5.5.10)，有

$$\lim_{t\to 0}(2\sqrt{t})^k F_k(2\sqrt{t}s,t) = Q_k(s)$$

$$= \int_s^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial r_k}\right)\int_{r_k}^\infty \cdots \left(-\frac{\partial}{\partial r_2}\right)\int_{r_2}^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial r_1}\right)$$

$$\times e^{-r_1^2}\frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2-r_2^2}}\frac{\mathrm{d}r_2}{\sqrt{r_2^2-r_3^2}}\cdots\frac{\mathrm{d}r_k}{\sqrt{r_k^2-s^2}}$$

$$= 2^k\int_0^\infty\int_{r_k}^\infty\cdots\int_{r_2}^\infty e^{-r_1^2}r_1\cdots r_k\sqrt{r_1^2-r_2^2}$$

$$\times\sqrt{r_2^2-r_3^2}\cdots\sqrt{r_k^2-s^2}\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_k > 0. \qquad (6.3.34)$$

由此及由(5.5.8)知

$$c(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)) = \lim_{t\to+0}\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)} h(r_1,\cdots,r_m,t)\dot{Z}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}m(m-1)}v_0\left(\frac{4}{\pi}\right)^m\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left|\prod_{j<k}(s_j^2-s_k^2)\right|^2$$

$$\times\prod_{k=1}^m s_j\prod_{k=1}^m Q_{2k-1}(s_k)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_k > 0.$$

$$(6.3.35)$$

定理证毕. ▌

定理6.3.7 典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 的不变度量的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 的 Green 函数为

$$G(Z,W) = -\int_0^\infty H(Z,W,t)\mathrm{d}t,$$

其中 $H(Z,W,t)$ 为热方程

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta H$$

的热核. 即对任一在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)$ 连续并有界的函数 $\varphi(Z)$ 有

$$\Delta\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m)}\varphi(w)G(Z,W)\dot{W} = \varphi(Z).$$

由于 $r_j(Z,Z)=r_j(0,0)=0$, $j=1,\cdots,m$, 故

$$H(Z,Z,t)=\frac{1}{c(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(m))}h(0,\cdots,0,t).$$

系6.3.8　$H(Z,Z,t)$与 Z 无关.

§ 6.4　其他超球及对偶空间

在1959年华罗庚与陆启铿[25]合作发表的文章最后一节,已经知道把对称空间 $SO(m,n)/S(O(m)\times O(n))$用 $m\times n$ 实矩阵 X 将其实现为

$$\mathfrak{R}_R(m,n)=\{X\in \mathrm{R}^{m+n}|I-XX'>0\},$$

并且在此域上建立了调和函数论,即把此域的 Poisson 核构造出来,以之解决 Dirichlet 问题.接着,作者开始对非例外的、不可约的、黎曼大范围对称空间(为简便起见,简称之为 NIRGSS,即 Nonexceptional, Irreducible, Riemannian, Globly, Symmetric Spaces)用矩阵实现,以期把典型域及 $\mathfrak{R}_R(m,n)$的调和函数论推广到非紧的 NIRGSS 上.但当把它全部实现之后,发现它们都是超球,或超球与一超曲面之交.如果只考虑超球,则这些超球的调和函数论在方法上与已知的并无本质的不同.故作者三十多年来对手稿是否发表并不在乎,虽然已有若干人用到此手稿的结果.但有超球就有内切超圆坐标,这对热核的构造至关重要.要把构造热核的方法推广到其他非紧 Ⅲ 型对称空间,证明这些对称空间也是超球就有必要了.所以这里把未曾发表的手稿的证明拿出来,供后继者参考.这里包括了非紧 Ⅲ 型对称空间的对偶空间(即 Ⅰ 型对称空间或对称扩充空间)的矩阵实现,因为超球就是在对偶空间中定义的.这两类已经占了对称空间的大部分,所以这里把余下部分(即 Ⅱ 型或 Ⅳ 型)对称空间的矩阵实现也写出来.先把结果列举出来,随后再作证明.

这里对称空间及典型群的符号皆沿用 Helgason 的书中 Chap. Ⅸ 中所用的符号.表6.1中第一列来自该书相应表中的 NIRGSS,第二列是本节将要证明的该表左边的对称空间的矩阵

表示. 在此之前，首先指出第Ⅱ类型 NIRGSS 是：

$SL(n+1,\mathbf{C})$：是行列式为1的复 $n+1$阶非异方阵所成的群，$n\geqslant 1$；

$SO(2n+1,\mathbf{C})$：是行列式为1的奇阶实正交方阵所成的群，$n\geqslant 2$；

$Sp(n,\mathbf{C})$：是 n 阶复辛群，$n\geqslant 3$；

$SO(2n,\mathbf{C})$：是行列式为1的偶阶实正交方阵所成的群，$n\geqslant 4$.

它们本身是矩阵群，即本身就是矩阵表示.

表6.1(甲) 第Ⅲ类型 NIRGSS 的矩阵表示

商空间	矩阵表示
$SL(n,\mathbf{R})/SO(n)$	$S>0$，S 为 n 阶实对称方阵， 适合 $\det S=1$，或者 $I-TT'>0$，T 为 n 阶实对称方阵， 适合 $\det(I+T)=\det(I-T)$
$SU^*(2n)/Sp(n)$ SU^* 为$2n$ 阶非异复方阵 A， 适合 $\overline{A}J=JA$ 所成的群. $J=\begin{bmatrix}0 & I^{(n)}\\ -I^{(n)} & 0\end{bmatrix}$，$Sp(n)$为辛酉群	$H>0$，$H^{(2n)}=H^{\dagger}$， $\det H=1$，$\overline{H}J=JH$ 或者 $I-TT^{\dagger}>0$，$T^{(2n)}=-T'$，$\overline{T}J=JT$， $\det(J+T)=\det(J-T)$
$SU(p,q)/S(U(p)\times U(q))$	$I-ZZ^{\dagger}>0$，Z 是 $p\times q$ 复矩阵
$SO(p,q)/S(O(p)\times O(q))$	$I-XX'>0$，X 是 $p\times q$ 实矩阵
$SO^*(2n)/U(n)$，$SO^*(2n)$ 是行列式为1的$2n$ 阶复正交方阵 A， 适合 $\overline{A}J=JA$ 所成的群	$I-ZZ^{\dagger}>0$，$Z^{(n)}=-Z'$
$Sp(n,\mathbf{R})/U(n)$	$I-ZZ^{\dagger}>0$，$Z^{(n)}=Z'$
$Sp(p,q)/(Sp(p)\times Sp(q))Sp(p,q)$ 同构于四元素 $p+q$ 阶非异方阵，适合 $A\begin{bmatrix}I^{(p)} & 0\\ 0 & -I^{(q)}\end{bmatrix}A^*=\begin{bmatrix}I^{(p)} & 0\\ 0 & -I^{(q)}\end{bmatrix}$	$I-ZZ^*>0$，Z 是 $p\times q$ 四元素矩阵， Z^* 是四元素共轭矩阵或者 $I-TT^{\dagger}>0$，T 为$2p\times 2q$ 复矩阵， 适合 $K_0^{(2p)}T=\overline{T}K_0^{(2q)}$， $K_0^{(2p)}=I^{(p+q)}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

表6.1(乙)　第 I 类型 NIRGSS 的矩阵表示

商空间	矩阵表示
$SU(n)/SO(n)$	所有行列式为1的方阵 $$S=\Gamma\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&&&\\&e^{i\theta_2}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\Gamma',$$ 其中 Γ 为任意 n 阶实正交方阵, $\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant0,2\pi>\theta_1\geqslant0,\pi>\theta_2\geqslant0$
$SU(2n)/Sp(n)$	所有行列式为1的 $2n$ 阶方阵 $$K=U\begin{bmatrix}\Lambda&0\\0&\Lambda\end{bmatrix}U',$$ 其中 U 是酉方阵,适合 $UJ=J\overline{U}$, $$J=\begin{bmatrix}0&I^{(n)}\\-I^{(n)}&0\end{bmatrix},$$ $$\Lambda=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{i\theta_n}\end{pmatrix},$$ $\pi>\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant0$
$SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$	以所有秩为 p 的 $p\times(p+q)$ 复矩阵 $\mathfrak{Z}$ 为"齐次坐标"的空间,即复 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}_{(p,q)}$
$SO(p+q)/S(O(p)\times O(q))$	以所有秩为 p 的 $p\times(p+q)$ 实矩阵 $\mathfrak{X}$ 为"齐次坐标"的空间,即实 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}_R(m,n)$
$SO(2n)/U(n)$	$\mathfrak{F}(n,n)$ 中的点的"齐次坐标"$\mathfrak{Z}$,适合 $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'=0$ 所成的子空间.
$Sp(n)/U(n)$	$\mathfrak{F}(n,n)$ 中的点"齐次坐标"$\mathfrak{Z}$,适合 $\mathfrak{Z}J\mathfrak{Z}'=0$, $$J=\begin{bmatrix}0&I^{(n)}\\-I^{(n)}&0\end{bmatrix}$$ 所成的子空间
$Sp(p+q)/(Sp(p)\times Sp(q))$	以所有秩为 $2p$ 的 $2p\times(2p+2q)$ 复矩阵 $\mathfrak{Z}$ 为"齐次坐标"的空间,其中 $\mathfrak{Z}$ 适合 $K_0^{(2p)}\mathfrak{Z}=\overline{\mathfrak{Z}}K_0^{(2p+2q)}$;即四元素 Grassmann 流形 $\mathfrak{F}_Q(m,n)$

注意：表6.1(甲)与(乙)的空间按次序一一对应，它们的固定子群是相同的，称为*互相对偶空间*.(甲)中的空间是非紧的；(乙)中的空间是紧的.当(乙)中的空间有复结构，即第三行、第四行 $p=2$ 的情形，第五与第六行的空间，称其对偶空间为*扩充空间*(见《典》著中§1.1)，在(甲)中第四行的空间 $p=2$ 时，等价于典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}(q)$.

我们讨论的大多数是表6.1(甲)中的对称空间，这不免要涉及到它在(乙)中的对偶空间，其他两类(Ⅱ和Ⅳ类型)有时也考虑(见文献[48]中所附的文献).

表6.1(丙)　第Ⅳ类型 NIRGSS 的矩阵表示

商空间	矩阵表示
$SL(n+1,\mathbf{C})/SU(n+1)$	所有 $n+1$ 阶复方阵 $H>0, H=H^{\dagger}, \det H=1$
$SO(2n+1,\mathbf{C})/SO(2n+1)$	所有 $2n+1$ 阶方阵 $H=\Gamma P_0\left[\begin{bmatrix} e^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1}\end{bmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{bmatrix} e^{-\lambda_n} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}\oplus 1\right]P_0^{-1}\Gamma^{-1}$ 其中 Γ 是任意的实正交方阵，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$，$P_0=I^{(n)}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i\end{bmatrix}\oplus 1$
$Sp(n,\mathbf{C})/Sp(n)$	所有 $2n$ 阶方阵 $H=U\begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1}\end{bmatrix}U^{\dagger}$，$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$，其中 U 是任意的酉方阵，适合 $\overline{U}J=JU$，$J=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0\end{bmatrix}$
$SO(2n,\mathbf{C})/SO(2n)$	所有 $2n$ 阶方阵 $H=\Gamma P_0\left[\begin{bmatrix} e^{-\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1}\end{bmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{bmatrix} e^{-\lambda_n} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}\right]P_0^{-1}\Gamma^{-1}$ 其中 Γ 是任意的实正交方阵，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$，$P_0=I^{(n)}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i\end{bmatrix}$

现在依次证明表6.1(甲)、(乙)、(丙)中的矩阵表示.

证　(甲)中的矩阵表示

(i) $SL(n,\mathbf{R})/SO(n)$:

这里$SL(n,\mathbf{R})$是n阶的行列式为1的实方阵所成的群,$SO(n)$是n阶的行列式为1的实正交方阵所成的群.

如$A\in SL(n,\mathbf{R})$,则知存在n阶实正交方阵Γ_1与Γ_2,使得

$$A=\Gamma_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\Gamma_2,$$

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0.$$

由此知
$$A=S\Gamma,\tag{6.4.1}$$
其中　$\Gamma=\Gamma_1\Gamma_2$,显然有$\det\Gamma=1$,即$\Gamma\in SO(n)$;

$$S=\Gamma_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\Gamma_1',\ \text{显然有}\ \det S=1.$$

如果能证明(6.4.1)的分解是唯一的,则S是$A\in SL(n,\mathbf{R})$在商空间$SL(n,\mathbf{R})/SO(n)$的唯一的代表.这些S便构成此商空间.

如果有

$$S\Gamma=\widetilde{S}\widetilde{\Gamma},\ \widetilde{\Gamma}\in SO(n),$$

$$\widetilde{S}=\widetilde{\Gamma}_1\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\lambda}_n\end{pmatrix}\widetilde{\Gamma}_1',\ \tilde{\lambda}_1\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\lambda}_n>0,\tag{6.4.2}$$

则有$S^2=\widetilde{S}^2$,即

$$\widetilde{\Gamma}_1'\Gamma_1\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix}\widetilde{\Gamma}_1'\Gamma_1.\tag{6.4.3}$$

应用下面的引理:

引理6.4.1 设 Λ 是对角线 n 阶方阵，若有方阵 B 适合 $B\Lambda^2=\Lambda^2B$，则必适合 $B\Lambda=\Lambda B$.

此引理的证明是显然的，只要比较方阵两端的元素便可以了.应用此引理于(6.4.3)，便得

$$\widetilde{\Gamma}_1'\Gamma_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}\widetilde{\Gamma}_1'\Gamma_1,$$

即
$$S=\widetilde{S}.$$

由(6.4.2)知

$$\Gamma=\widetilde{\Gamma},$$

故 $SL(n,\mathbf{R})/SO(n)\cong$所有行列式为1的实的正定对称方阵 S.

作变换

$$T=(I+S)^{-1}(I-S),$$

显然 T 是实对称方阵. 由此知

$$I-TT'=4(I+S)^{-1}S(I+S')^{-1}>0.$$

由逆变换

$$S=(I-T)(I+T)^{-1}$$

知，$\det(I-T)(I+T)^{-1}=\det S=1$，故 T 适合

$$\det\ (I+T)=\det\ (I-T).$$

这证明了(甲)中第一行的矩阵表示成立.

(ii) $SU^*(2n)/Sp(n)$：

这里 $SU^*(2n)$是$2n$ 阶行列式为1的方阵 A，适合

$$\overline{A}J=JA,\ J=\begin{pmatrix}0 & I^{(n)}\\ -I^{(n)} & 0\end{pmatrix}$$

所成的群；$Sp(n)$是辛酉群，即$2n$ 阶方阵 U，适合

$$UJU'=J,\ UU^{\dagger}=I$$

所成的群.

我们只要证明 A 能唯一地分解为

$$A=HU,\overline{H}J=JH,H=H^{\dagger}\ \text{正定},\det H=1.$$

其他的证明便如(i)一样，所以从略了.

实际上，$AA^\dagger$ 是 Hermite 方阵，适合

$$\overline{AA^\dagger}\, J = J AA^\dagger .$$

根据《典》著中附录 Ⅱ 的定理1.5.存在酉方阵 U_1，适合

$$\overline{U}_1 J = J U_1 ,$$

使得

$$AA^\dagger = U_1 \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} U_1^\dagger ,\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n > 0.$$

必定有 $\det U_1 = 1$.

令

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix},$$

则有

$$\left[\begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_1^{-1} \end{pmatrix} U_1^\dagger A \right] \left[\begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_1^{-1} \end{pmatrix} U_1^\dagger A \right]^\dagger = I.$$

即

$$V_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_1^{-1} \end{pmatrix} U_1^\dagger A$$

是酉方阵，易见，其行列式为1，且适合

$$\overline{V}_1 J = J V_1 .$$

由此知

$$A = U_1 \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} V_1 = HU ,$$

其中

$$U = U_1 V_1$$

是酉方阵，行列式为1且适合 $\overline{U} J = J U$，

$$H=U_1\begin{pmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_1\end{pmatrix}U_1^\dagger$$

是行列式为1的正定 Hermite 方阵，适合 $\overline{H}J=JH$. 分解的唯一性的证明如(i)一样.

作变换

$$T=(I+H)^{-1}(I-H)J=(I-H)(I+H)^{-1}J.$$

由此可见

$$\begin{aligned}T'&=-J(I-\overline{H})(I+\overline{H})^{-1}\\ &=-(I-H)(I+H)^{-1}J=-T,\\ \overline{T}J&=J^2(I+\overline{H})(I-\overline{H})=JT,\end{aligned}$$

并且

$$I-TT^\dagger=4(I+H)^{-1}H(I+H^\dagger)^{-1}>0.$$

由逆变换

$$H=(J-T)(J+T)^{-1}$$

知 $$\det(J+T)=\det(J-T).$$

这证明了(甲)中第二行的矩阵表示成立.

(iii) $SU(p,q)/S(U(p)\times U(q))$:

$SU(p,q)$表示行列式为1的 $p+q$ 阶方阵 A 适合

$$A\begin{pmatrix}I^{(p)} & 0\\ 0 & -I^{(q)}\end{pmatrix}A^\dagger=\begin{pmatrix}I^{(p)} & 0\\ 0 & -I^{(q)}\end{pmatrix}$$

所成的群；$S(U(p)\times U(q))$表示 $p+q$ 阶酉方阵 U，适合

$$U=\begin{pmatrix}U_1^{(p)} & 0\\ 0 & V^{(q)}\end{pmatrix},\ \det U=1$$

所成的群. 此两个群的商空间习知可表为典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(p,q)=\{Z\in \mathbb{C}^{p\times q}\mid I-ZZ^\dagger>0\}$. 但在此仍给出一个直接的证明.

据引理2.1.1. A 可写为

$$A=D(Z)\begin{pmatrix}U_1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix},$$

其中

$$D(Z)=\begin{pmatrix}(I-ZZ^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} & Z(I-Z^{\dagger}Z)^{-\frac{1}{2}}\\ Z^{\dagger}(I-ZZ^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} & (I-Z^{\dagger}Z)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

$$I-ZZ^{\dagger}>0, \tag{6.4.4}$$

其中 U_1 与 U_2 分别为 p 阶与 q 阶酉方阵，适合 $\det U_1\cdot\det U_2=1$. 余下只证明分解的唯一性：若有两分解：

$$D(Z)\begin{pmatrix}U_1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix}=D(Z_1)\begin{pmatrix}V_1 & 0\\ 0 & V_2\end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix}U_1V_1^{-1} & 0\\ 0 & U_2V_2^{-1}\end{pmatrix}=[D(Z)]^{-1}D(Z_1).$$

不难证明

$$[D(Z)]^{-1}=D(-Z). \tag{6.4.5}$$

而

$$\begin{aligned}&D(-Z)D(Z_1)\\ &=\begin{pmatrix}(I-ZZ^{\dagger})^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & (I-Z^{\dagger}Z)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -Z\\ -Z^{\dagger} & I\end{pmatrix}\\ &\quad\times\begin{pmatrix}I & Z_1\\ Z_1^{\dagger} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(I-Z_1Z_1^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & (I-Z_1^{\dagger}Z_1)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(I-ZZ^{\dagger})^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & (I-Z^{\dagger}Z)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\\ &\quad\times\begin{pmatrix}I-ZZ_1^{\dagger} & Z_1-Z\\ Z_1^{\dagger}-Z^{\dagger} & I-Z^{\dagger}Z_1\end{pmatrix}\\ &\quad\times\begin{pmatrix}(I-Z_1Z_1^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & (I-Z_1^{\dagger}Z_1)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

比较第一行第二列子矩阵知，必须 $Z=Z_1$，因而有 $D(-Z)D(Z_1)=I$，故 $U_1=V_1$，$U_2=V_2$. 这证明了分解是唯一的. 故(甲)中第三行的矩阵表示成立.

(iv) $SO(p,q)/S(O(p)\times O(q))$:

这里 $SO(p,q)$是 $p+q$ 阶实方阵 A,适合

$$AJ(p,q)A' = J(p,q),\ J(p,q) = \begin{pmatrix} I^{(p)} & 0 \\ 0 & -I^{(q)} \end{pmatrix}$$

并且行列式为1所成的群. 如用引理2.1.1于为实的情形,A 能分解为

$$A = D(X)\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix},\ I - XX' > 0,$$

其中 X 为 $p\times q$ 实矩阵,$D(X)$由(6.4.4)定义. 如证明以上情形一样,如此的分解是唯一的,因此(甲)中第四行的矩阵表示成立.

(v) $SO^*(2n)/U(n)$:

这里 $SO^*(2n)$是$2n$ 阶方阵 A,适合

$$A\begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix}A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},\ AA' = I$$

所成的群. 令

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -iI \\ I & iI \end{pmatrix},\ A = P_0^{\dagger} BP_0.$$

由于

$$P_0P_0^{\dagger} = I,\ P_0P_0' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_0\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}P_0^{\dagger} = i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

因此 B 适合

$$B\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}B^{\dagger} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}B' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

B 适合第一个条件,根据引理2.1.1,能唯一地分解为

$$B = D(Z)\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, I - ZZ^{\dagger} > 0, Z \text{ 为 } n\times n \text{ 方阵},$$

其中$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$适合第一个条件，故 $D(Z)$适合第一个条件. B 要适合第二个条件，即

$$D(Z)\begin{pmatrix} 0 & U_1U_2' \\ U_2U_1' & 0 \end{pmatrix}D(Z)' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

取 $Z=0$，由于 $D(0)=I$，知必须

$$U_2 = \overline{U}_1 = U_1'^{-1}.$$

当 Z 是方阵，根据(6.4.5)前一式化为

$$D(Z)\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}D(-Z)'.$$

比较两端第一行的子矩阵便有

$$Z = -Z'.$$

这证明了(甲)中第五行的矩阵表示成立.

(vi) $Sp(n,\mathbf{R})/U(n)$：

$Sp(n,\mathbf{R})$是实辛群，即$2n\times 2n$ 实方阵 A 适合条件

$$A\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}A' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.4.7}$$

即 A 是复方阵，除适合上条件外，还适合

$$A\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

亦即 $A\in Sp(n,\mathbf{C})$复辛群，还适合第二个条件，成为实辛群. 令方阵 P_0如(v)，$A=P_0^{\dagger}BP_0$，易见

$$P_0\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}P_0' = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

故 B 适合

$$B\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}B^{\dagger} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}B' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

于是由第一个条件，B 可唯一地分解为

$$B = D(Z)\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, I - ZZ^{\dagger} > 0,$$

它适合第二个条件，则如(v)一样可证 $U_2 = U_1'^{-1}$ 及 $Z = Z'$. 即(甲)中第六行的矩阵表示成立.

(vii) $Sp(p,q)/(Sp(p)\times Sp(q))$:

$Sp(p,q)$表示$2p+2q$ 阶方阵 A 适合

$$A\begin{pmatrix} 0 & I^{(p+q)} \\ -I^{(p+q)} & 0 \end{pmatrix}A' = \begin{pmatrix} 0 & I^{(p+q)} \\ -I^{(p+q)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$AK_{p,q}A^{\dagger} = K_{p,q},$$

$$K_{p,q} = I^{(p)} \oplus (-I^{(q)}) \oplus I^{(p)} \oplus (-I^{(q)}). \tag{6.4.8}$$

上面两个条件可写为

$$A\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}A'K_{p,q}\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}K_{p,q}\overline{A},$$

$$A'K_{p,q}\overline{A} = K_{p,q}.$$

此即

$$A\begin{pmatrix} 0 & 0 & I^{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I^{(q)} \\ -I^{(p)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I^{(q)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I^{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I^{(q)} \\ -I^{(p)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I^{(q)} & 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{A},$$

$$A^{\dagger}K_{p,q}A = K_{p,q}. \tag{6.4.9}$$

取适当的排列方阵 P_0，使得

$$P_0'\begin{pmatrix} 0 & 0 & I^{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I^{(q)} \\ -I^{(p)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I^{(q)} & 0 & 0 \end{pmatrix}P_0 = K_0^{(2p+2q)},$$

$$K_0 = I^{(p+q)} \cdot \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_0' K_{p,q} P_0 = \begin{pmatrix} I^{(2p)} & 0 \\ 0 & -I^{(2q)} \end{pmatrix}.$$

令 $A = P_0 B P_0'$，则 A 适合

$$BK_0 = K_0 \overline{B},$$

$$B^\dagger \begin{pmatrix} I^{(2p)} & 0 \\ 0 & -I^{(2q)} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} I^{(2p)} & 0 \\ 0 & -I^{(2q)} \end{pmatrix}. \qquad (6.4.10)$$

记

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2p \\ 2q \end{matrix}. \quad \begin{matrix} 2p & 2q \end{matrix}$$

则由(6.4.10)的第一个条件知

$$\overline{B}_1 K_0^{(2p)} = K_0^{(2p)} B_1, \quad \overline{B}_2 K_0^{(2q)} = K_0^{(2p)} B_2,$$

$$\overline{B}_3 K_0^{(2p)} = K_0^{(2p)} B_3, \quad \overline{B}_4 K_0^{(2q)} = K_0^{(2q)} B_4.$$

由(6.4.10)的第二个条件知 B 能唯一地分解为

$$B = \begin{pmatrix} (I - ZZ^\dagger)^{-\frac{1}{2}} & Z(I - Z^\dagger Z)^{-\frac{1}{2}} \\ Z^\dagger (I - ZZ^\dagger)^{-\frac{1}{2}} & (I - Z^\dagger Z)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} U_1^{(2p)} & 0 \\ 0 & U_2^{(2q)} \end{pmatrix}, \; I - ZZ^\dagger > 0.$$

根据(6.4.10)第一个条件，当取 $Z=0$. 知

$$U_1 K_0^{(2p)} = K_0^{(2p)} \overline{U}_1, \; U_2 K_0^{(2q)} = K_0^{(2q)} \overline{U}_2.$$

因此

$$D(Z) K_0 = K_0 \overline{D(Z)}.$$

故有

$$(I - Z^\dagger Z)^{-\frac{1}{2}} K_0^{(2q)} = K_0^{(2q)} (I - Z'\overline{Z})^{-\frac{1}{2}},$$

$$Z(I - Z^\dagger Z)^{-\frac{1}{2}} K_0^{(2q)} = K_0^{(2p)} \overline{Z} (I - Z'\overline{Z})^{-\frac{1}{2}}.$$

由此得出

$$Z K_0^{(2q)} = K_0^{(2p)} \overline{Z}.$$

熟知一个四元素 $\mathfrak{a}=\alpha+i\beta+j\gamma+k\delta$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实数)可写为

$$\mathfrak{a}=a+jb,\ a=\alpha+i\beta,\ b=\gamma+i\delta, \qquad (6.4.11)$$

并且

$$\mathfrak{a}\to A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$$

是一个代数同构,此即2×2方阵 A 适合条件

$$A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\bar{A}.$$

由此可见一个 $p\times q$ 四元素矩阵

$$\mathfrak{Z}=\begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_{11} & \cdots & \mathfrak{Z}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{Z}_{p1} & \cdots & \mathfrak{Z}_{pq}\end{pmatrix}\to Z^{(2p,2q)},$$

其中 Z 适合(6.4.10)的第一个条件.

由于四元素 $\mathfrak{a}$ 的共轭

$$\mathfrak{a}^*=\alpha-i\beta-j\gamma-k\delta,$$

故

$$\mathfrak{Z}^*=\begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_{11}^* & \cdots & \mathfrak{Z}_{1q}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{Z}_{p1}^* & \cdots & \mathfrak{Z}_{pq}^*\end{pmatrix}'\to Z^\dagger.$$

因此

$$I-\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^*\to I-ZZ^\dagger>0.$$

这是一同构,必须 $I-\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^*>0$,反之亦然,这证明了(甲)中第七行的矩阵表示成立.

证(乙)中的矩阵表示

(i) $SU(n)/SO(n)$:

由于 UU' $(U\in SU(n))$是对称酉方阵,熟知存在实正交方阵 Γ_1,使得

$$UU' = \Gamma_1 \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \Gamma_1',$$

$$2\pi > \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant 0$$

(例如见文献[18]中第十一章，§ 1，引理2). 由于 $\det UU' = 1$，故有

$$\theta_1 + \cdots + \theta_n = 2k\pi,\ k \geqslant 0.$$

当 k 为偶数时，令

$$\varphi_1 = \frac{\theta_1}{2}, \cdots, \varphi_n = \frac{\theta_n}{2},\ \varphi_1 + \cdots + \varphi_n = k\pi.$$

当 k 为奇数时，令

$$\varphi_1 = \frac{\theta_1}{2} + \pi, \varphi_2 = \frac{\theta_2}{2}, \cdots, \varphi_n = \frac{\theta_n}{2},$$

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = (k+1)\pi.$$

总之可写为

$$UU' = \Gamma_1 \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \Gamma_1' \Gamma_1 \times \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \Gamma_1' = S^2,$$

其中

$$S = \Gamma_1 \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \Gamma_1',$$

$$\varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n \geqslant 0,$$

$$2\pi > \varphi_1 \geqslant 0, \pi > \varphi_2 \geqslant 0;$$

S 是对称的行列式为1的酉方阵.

由于

$$(S^{-1}U)(S^{-1}U)' = I,\ 或\ S^{-1}U = SU'^{-1} = \overline{S^{-1}U},$$

即 $\Gamma = S^{-1}U$ 是行列式为1的实正交方阵，亦即 U 有分解

$$U = S\Gamma.$$

此分解是唯一的，如有另一分解 $U=\widetilde{S}\widetilde{\Gamma}$，则由 $S^2=\widetilde{S}^2$ 知，S^2 的特征根与 S_1^2 的特征根皆相等，即有

$$e^{2i\varphi_1}=e^{2i\tilde{\varphi}_1},\ e^{2i\varphi_2}=e^{2i\tilde{\varphi}_2},\ \cdots,\ e^{2i\varphi_n}=e^{2i\tilde{\varphi}_n}.$$

由于 $2\pi>2\varphi_2\geqslant\cdots\geqslant 2\varphi_n\geqslant 0$，$2\pi>2\tilde{\varphi}_2\geqslant\cdots\geqslant 2\tilde{\varphi}_n\geqslant 0$，故有 $\varphi_2=\tilde{\varphi}_2,\cdots,\varphi_n=\tilde{\varphi}_n$.

由于

$$e^{i(\varphi_1+\cdots+\varphi_n)}=e^{i(\tilde{\varphi}_1+\cdots+\tilde{\varphi}_n)}=1.$$

故 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n=\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2+\cdots+\tilde{\varphi}_n+2k\pi$，即

$$\varphi_1=\tilde{\varphi}_1+2k\pi.$$

由于 $2\pi>\varphi_1\geqslant 0$，$2\pi>\tilde{\varphi}_1\geqslant 0$，必须 $k=0$. 即 S 与 $\widetilde{S}$ 的特征根皆相等. 由于 $S^2=\widetilde{S}^2$，故有

$$\widetilde{\Gamma}_1^{-1}\Gamma_1\begin{pmatrix} e^{2i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2i\varphi_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2i\varphi_n}\end{pmatrix}\widetilde{\Gamma}_1^{-1}\Gamma_1.$$

根据引理6.4.1，有

$$\widetilde{\Gamma}_1^{-1}\Gamma_1\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_n}\end{pmatrix}\widetilde{\Gamma}_1^{-1}\Gamma_1.$$

由此知

$$S=\widetilde{S}，故\ \Gamma=\widetilde{\Gamma}.$$

这证明了（乙）中第一行的矩阵表示成立.

以下内容的证明要借助于：

引理6.4.2 设 H 是 $2n$ 阶非异方阵，适合

$$HH^{\dagger}=H^{\dagger}H,\ HJ\overline{H}=J,$$

则存在酉方阵U，适合$UJ=J\overline{U}$，使得

$$H=U\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \overline{\Lambda}^{-1}\end{pmatrix}U^{\dagger},\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

证　令P_0是一适当的排列方阵，使得

$$P_0K_0P_0'=J=\begin{pmatrix}0 & I^{(n)}\\ -I^{(n)} & 0\end{pmatrix},$$

$$K_0=K_0^{(2n)}=I^{(n)}\cdot\times\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

令$H_1=P_0HP_0'$，则引理化为要对非异的方阵H_1，适合

$$H_1K_0\overline{H}_1=K_0,\ H_1H_1^{\dagger}=H_1^{\dagger}H_1.$$

则有酉方阵U_1适合$U_1K_0=K_0\overline{U}_1$，使得

$$H_1=U_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}_1}\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{pmatrix}\lambda_n & 0\\ 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}_n}\end{pmatrix}\right]U_1^{\dagger}.$$

首先注意，如u是H_1的单位特征向量，使得

$$uH_1=\lambda u,\lambda\text{ 是 }H_1\text{ 的特征根},$$

则由$H_1K_0\overline{H}_1=K_0$，知

$$uH_1K_0\overline{H}_1=\lambda uK_0\overline{H}_1=uK_0\text{ 或者 }\overline{u}K_0H_1=\frac{1}{\overline{\lambda}}\overline{u}K_0.$$

这表示$\overline{u}K_0$也是特征向量，对应的特征根为$\frac{1}{\overline{\lambda}}$. 由于$u(\overline{u}K_0)^{\dagger}=-uK_0u'=0$，故当$n=1$时，$\begin{pmatrix}u\\ \overline{u}K_0\end{pmatrix}$是酉方阵，使得

$$\begin{pmatrix}u\\ \overline{u}K_0\end{pmatrix}H_1\begin{pmatrix}u\\ \overline{u}K_0\end{pmatrix}^{\dagger}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \overline{\lambda}^{-1}\end{pmatrix}.$$

显然，

$$K_0^{(2)}\overline{\begin{pmatrix}u\\ \overline{u}K_0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}u\\ \overline{u}K_0\end{pmatrix}K_0^{(2)}.$$

假定引理在H_1为$2(n-1)$阶非异方阵时成立($n>1$). 现证H_1是$2n$阶非异方阵的情况.

任取 H_1的单位特征向量 u_1,对应的特征根为 λ_1;已知 $\overline{u}_1K_0$也是 H_1的特征向量,其对应的特征根为$\frac{1}{\lambda_1}$. 任取单位向量 u_2和 u_1与 $\overline{u}_1K_0$正交,则 $\overline{u}_2K_0$必与 u_1、$\overline{u}_1K_0$、u_2正交,因为

$$\overline{u}_2K_0\overline{u}_1' = -\overline{[u_2(\overline{u}_1K_0)^\dagger]} = 0,$$

$$(\overline{u}_2K_0)(\overline{u}_1K_0)^\dagger = \overline{u_2u_1^\dagger} = 0.$$

设我们已构造了$2k$ 个互相正交的单位向量

$$u_1,\ \overline{u}_1K_0,\ u_2,\ \overline{u}_2K_0,\ \cdots,\ u_k,\ \overline{u}_kK_0,$$

则当 $k<n$ 时,可任取一个单位向量 u_{k+1}与上面$2k$ 个向量正交,且同法可证 $\overline{u}_{k+1}K_0$必与上面$2k$ 个向量及 u_{k+1}正交. 这表示可作一个如下的酉方阵:

$$U_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \overline{u}_1K_0 \\ \vdots \\ u_n \\ \overline{u}_nK_0 \end{pmatrix}, \text{适合 } K_0\overline{U}_2 = U_2K_0,$$

使得

$$U_2H_1U_2^\dagger = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix} & 0 \\ H_3 & H_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $H_1H_1^\dagger = H_1^\dagger H_1$,必须 $H_3=0$,而 H_2适合 $H_2^\dagger H_2 = H_2H_2^\dagger$,$H_2K_0^{(2n-2)}\overline{H}_2=K_0^{(2n-2)}$. 根据归纳法假设,存在酉方阵 U_0,适合 $\overline{U}_0K_0^{(2n-2)}=K_0^{(2n-2)}U_0$,使得

$$H_2 = U_0\left[\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}\right]U_0^\dagger.$$

由此知,若令

$$U_1 = \begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & U_0 \end{pmatrix} U_2,$$

则有

$$\overline{U}_1 K_0^{(2n)} = K_0^{(2n)} U_1$$

及
$$H_1 = U_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}_1} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}_n} \end{pmatrix} \right] U_1^{\dagger},$$

从而证明了引理. ▌

(ii) $SU(2n)/Sp(n)$:

设 $U \in SU(2n)$. 令

$$V = UJU'J',\ J = \begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix}.$$

V 是酉方阵,适合

$$VJ\overline{V} = J.$$

根据上面的引理6.4.2知,存在酉方阵 $V_1 \in Sp(n)$ 使得

$$V = V_1 \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} V_1^{\dagger},\ \Lambda_1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix},$$

$$2\pi > \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant 0.$$

令

$$L = V_1 \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} V_1^{\dagger},\ \Lambda = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n/2} \end{pmatrix},$$

则有
$$LJ\overline{L} = J \text{ 或 } LJ = J\overline{L}^{-1};$$

$$UJU'J' = L^2 \text{ 或} (L^{-1}U)J = J\,\overline{(L^{-1}U)}.$$

这表示 $U_1 = L^{-1}U$ 适合

$$\overline{U}_1 J = JU_1,\ U_1 U_1^{\dagger} = I, \text{即} U_1 \in Sp(n).$$

故 U 有分解

$$U = LU_1.$$

若有另一分解

$$U = \widetilde{L}\widetilde{U}_1,\ \widetilde{U}_1 \in Sp(n),$$

$$\widetilde{L}=\widetilde{V}_1\begin{pmatrix}\widetilde{\Lambda} & 0\\ 0 & \widetilde{\Lambda}\end{pmatrix}\widetilde{V}_1^{\dagger},\widetilde{V}_1\in Sp(n),$$

$$\widetilde{\Lambda}=\begin{pmatrix}e^{\frac{i}{2}\tilde{\theta}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\frac{i}{2}\tilde{\theta}_n}\end{pmatrix},$$

$$2\pi>\tilde{\theta}_1\geqslant\tilde{\theta}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\theta}_n\geqslant 0,$$

则有

$$\widetilde{L}J=J\widetilde{L}',$$

故有

$$UJU'J'=\widetilde{L}^2.$$

由 $L^2=\widetilde{L}^2$知,L^2与 $\widetilde{L}^2$的特征根必相同,即 $\Lambda^2=\widetilde{\Lambda}^2$.由此知

$$\widetilde{V}_1^{-1}V_1\begin{pmatrix}\Lambda^2 & 0\\ 0 & \Lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda^2 & 0\\ 0 & \Lambda^2\end{pmatrix}\widetilde{V}_1^{-1}V_1.$$

据引理6.4.1知

$$\widetilde{V}_1^{-1}V_1\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}\widetilde{V}_1^{-1}V_1,$$

此即

$$L=\widetilde{L}\text{ 故 }U_1=\widetilde{U}_1.$$

这证明了(乙)中第二行的矩阵表示成立.

(iii) $SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$:

这是第1章定理1.3.2当 $r=1,m_1=p,m_2=q$ 时的特殊情况,故(乙)中第三行的矩阵表示成立.

(iv) $SO(p+q)/S(U(p)\times U(q))$:

这是(iii)中所用定理1.3.2为实的情形.即(乙)中第四行的矩阵表示是实 Grassmann 流形的矩阵表示.

(v) $SO(2n)/U(n)$:

在《典》著的§3.2(ii)中 $\mathfrak{F}(n,n)$的复子流形 $\mathfrak{P}_{\mathrm{III}}(n;n)$即"齐次坐标"$\mathfrak{Z}$ 适合

$$\mathfrak{Z}\begin{pmatrix}0 & I^{(n)}\\ I^{(n)} & 0\end{pmatrix}\mathfrak{Z}'=0$$

所成的复流形. 这在由适合《典》著中(3.2.40)条件的 $SU(2n)$ 的子群 $\mathfrak{U}_{\mathrm{III}}(2n)$ 下为可递的. 迷向子群(即$(I,-I)$为齐次坐标的点的固定分群)为 $U(n)$. 经变换

$$\mathfrak{W}=\mathfrak{Z}U_0^{-1},\ U_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I^{(n)} & I^{(n)} \\ -iI^{(n)} & iI^{(n)} \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{U}_{\mathrm{III}}(2n)$同构于 $SO(2n)$, $\mathfrak{P}_{\mathrm{III}}(n;n)$变为一复流形,由

$$\mathfrak{W}\mathfrak{W}'=0$$

所定义. 这证明了(乙)中第五行的矩阵表示成立.

(vi) $Sp(n)/U(n)$:

在《典》著的§3.2(i)中已证明 $\mathfrak{F}(n,n)$的复子流形 $\mathfrak{P}_{\mathrm{II}}(n;n)$ 由

$$\mathfrak{Z}\begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{Z}'=0$$

所定义,它在 $Sp(n)$诱导的变换下可递,它的迷向群(即齐次坐标为(I,I)的点的固定分群)为 $U(n)$. 这证明了(乙)中第六行的矩阵表示成立.

(vii) $Sp(p+q)/(Sp(p)\times Sp(q))$:

如(甲)中(vii)的证明,可用适当排列方阵,使 $Sp(p+q)$的元素 $\mathfrak{U}$ 适合

$$\mathfrak{U}K_0=K_0\overline{\mathfrak{U}},\ \mathfrak{U}\mathfrak{U}^{\dagger}=I,\ K_0=I^{(p+q)}\cdot\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathfrak{Z}$ 为秩为$2p$ 的$2p\times(2p+2q)$矩阵,适合

$$\mathfrak{Z}K_0^{(2p+2q)}=K_0^{(2p)}\overline{\mathfrak{Z}}.\tag{6.4.12}$$

这些矩阵所成的空间以 $E_Q(2p;2q)$表示之. $\mathfrak{Z}_1$、$\mathfrak{Z}_2\in E_Q(m;n)$称为等价,以 $\mathfrak{Z}_1\sim\mathfrak{Z}_2$表示之,当且仅当存在$2p$ 阶非异方阵 P,适合 $PK_0^{(2p)}=K_0^{(2p)}\overline{P}$,使得

$$\mathfrak{Z}_1=P\mathfrak{Z}_2.$$

把 $E_Q(2p;2q)$的矩阵按此等价关系分为等价类,这些等价类所成的空间即为 $\mathfrak{F}_Q(2p,2q)$,这是一个实解析流形. 不难证明它在变换

$$\mathfrak{W}=\mathfrak{Z}\mathfrak{U},\ \mathfrak{U}\in Sp(p+q)$$

下是可递的,并且使齐次坐标

$$(I^{(2p)},0) \quad (\text{假定 } p \leqslant q)$$

不变的固定子群为

$$\mathfrak{U}_0 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \; U \in Sp(p), \; V \in Sp(q).$$

因此

$$Sp(p+q)/(Sp(p) \times Sp(q)) \cong \mathfrak{F}_Q(p,q).$$

用(甲)(vii)中的代数同构

$$\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Q}$$

把适合条件(6.4.12)的$2p\times(2p+2q)$矩阵$\mathfrak{Z}$对应于$p\times(p+q)$的四元素矩阵$\mathfrak{Q}$. $\mathfrak{Q}_1\sim\mathfrak{Q}_2$当且仅当有四元素$p$阶非异方阵$\mathfrak{P}$使$\mathfrak{Q}_1=\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_2$,则等价类所成的空间即$\mathfrak{F}_Q(p,q)$,故称它为四元素Grassmann流形.

证(丙)中的矩阵表示

(i) $SL(n+1,\mathbf{C})/SU(n+1)$:

$SL(n+1,\mathbf{C})$表示行列式为1的$n+1$阶方阵A所成的群,则知存在$U\in SU(n+1)$使

$$A = HU, \; H = H^{\dagger} > 0.$$

由于$\det A=1$,故$\det H=1$. 易证此分解是唯一的,故(丙)中第一行的矩阵表示成立.

(ii) $SO(2n+1,\mathbf{C})/SO(2n+1)$:

$SO(2n+1,\mathbf{C})$是行列式为1的$2n+1$阶复正交方阵Γ所成的群.

由于$\Gamma\Gamma^{\dagger}$是正定的,$(\Gamma\Gamma^{\dagger})(\Gamma\Gamma^{\dagger})'=I$,根据矩阵论的结果(见文献[18]中第十一章,§1,引理1)知存在实的反称方阵K,使得

$$\Gamma\Gamma^{\dagger} = e^{iK}.$$

习知存在$2n+1$阶实正交方阵Γ_1使得

$$K = \Gamma_1\left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_n \\ -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} \oplus 0\right]\Gamma_1'$$

(见《典》著中附录 Ⅱ 的定理1.4的证明). 由此知 K 可写为

$$K=\Gamma_1\left[I^{(n)}\cdot\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}\oplus 1\right]$$
$$\times\left[i\lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus i\lambda_n\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\oplus 0\right]$$
$$\times\left[I^{(n)}\cdot\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}\oplus 1\right]^{-1}\Gamma_1^{-1},$$
$$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,$$

故

$$e^{iK}=\Gamma_1P_0\left[\begin{pmatrix}e^{-\lambda_1}&0\\0&e^{\lambda_1}\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{pmatrix}e^{-\lambda_n}&0\\0&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}\oplus 1\right]P_0^{-1}\Gamma_1^{-1},$$

其中

$$P_0=I^{(n)}\cdot\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}\oplus 1.$$

令

$$A=\Gamma_1P_0\left[\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}&0\\0&e^{\frac{1}{2}\lambda_1}\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{2}\lambda_n}&0\\0&e^{\frac{1}{2}\lambda_n}\end{pmatrix}\oplus 1\right]P_0^{-1}\Gamma_1^{-1},$$

则有
$$e^{iK}=AA^{\dagger}=\Gamma\Gamma^{\dagger}.$$
由
$$A^{-1}\Gamma(A^{-1}\Gamma)^{\dagger}=1$$
知 $R=A^{-1}\Gamma$ 是酉方阵. 由于 $\det\Gamma=1,\det A=1$,故必有 $\det R=1$. 由于 $A=e^{\frac{i}{2}K}$,故

$$RR'=e^{-\frac{i}{2}K}\Gamma\Gamma'e^{\frac{i}{2}K}=I.$$

R 是复正交方阵,它同时是酉方阵,故 R 必为$2n+1$阶实正交方

阵.

这样有分解

$$\Gamma = AR.$$

若另有一分解

$$\Gamma = \widetilde{A}\widetilde{R},\ \widetilde{R} \in SO(2n+1),$$

$$\widetilde{A} = \widetilde{\Gamma}_1 P_0 \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mu_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\mu_1}{2}} \end{pmatrix} \bigoplus \cdots \\ \bigoplus \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\mu_n} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\mu_n} \end{pmatrix} \bigoplus 1 \end{bmatrix} P_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_1^{-1},$$

$$\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant 0,$$

则有

$$AA^\dagger = A_1A_1^\dagger = e^{iK},$$

即 $AA^\dagger$ 与 $A_1A_1^\dagger$ 的特征根皆相同,故有

$$\lambda_1 = \mu_1, \cdots, \lambda_n = \mu_n.$$

因此

$$(\widetilde{\Gamma}_1 P_0)^{-1}\Gamma_1 P_0 \Lambda^2 = \Lambda^2 (\widetilde{\Gamma}_1 P_0)^{-1}\Gamma_1 P_0,$$

根据引理6.4.1,有

$$(\widetilde{\Gamma}_1 P_0)^{-1}\Gamma_1 P_0 \Lambda = \Lambda (\widetilde{\Gamma}_1 P_0)^{-1}\Gamma_1 P_0,$$

此即 $A=\widetilde{A}$,因此 $R=\widetilde{R}$. 这证明了(丙)中第二行的矩阵表示成立.

(iii) $Sp(n,\mathbf{C})/Sp(n)$:

现在设 $A\in Sp(n,\mathbf{C})$,则 $AA^\dagger$ 是正定 Hermite 方阵,适合

$$AA^\dagger J\,\overline{(AA^\dagger)} = J.$$

应用引理6.4.2知,存在 $V\in Sp(n)$,使得

$$AA^\dagger = V\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1^{-1} \end{pmatrix} V^\dagger.$$

由于 $AA^\dagger$ 是正定的,不妨假定

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix},\ \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0.$$

令

$$H = V\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} V^{\dagger}, \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

则
$$\overline{H}J = JH.$$

由 $AA^{\dagger} = HH^{\dagger}$ 知，$U = H^{-1}A$ 是酉方阵.

由于

$$\begin{aligned} HJ\overline{H} &= V\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} V^{\dagger} J \overline{V} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix} V' \\ &= V\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} V' \\ &= VJV' = J, \end{aligned}$$

故有 $U'JU = J$ 或者 $\overline{U}J = JU$. 因此有分解

$$A = HU,$$

其中 $HJ\overline{H} = J$ 及 $UJ = J\overline{U}$，$H = H^{\dagger} > 0$. 若另有一分解

$$A = \widetilde{H}\widetilde{U}$$

具有同样性质，即$\bar{\widetilde{U}}J = J\widetilde{U}$，$\widetilde{U}$ 为酉方阵，

$$\widetilde{H} = \widetilde{V}\begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda} & 0 \\ 0 & \widetilde{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix} \widetilde{V}, \ \widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\lambda}_1 \geqslant \cdots \geqslant \tilde{\lambda}_n > 0.$$

则由 $H^2 = \widetilde{H}^2 = AA^{\dagger}$ 知有相同的特征根，故有 $\Lambda^2 = \widetilde{\Lambda}^2$，于是有

$$\widetilde{V}^{-1}V\begin{pmatrix} \Lambda^2 & 0 \\ 0 & \Lambda^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^2 & 0 \\ 0 & \Lambda^{-2} \end{pmatrix} \widetilde{V}^{-1}V.$$

据引理6.4.1，有

$$\widetilde{V}^{-1}V\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix} \widetilde{V}^{-1}V,$$

由此得出 $H = \widetilde{H}$ 故 $U = \widetilde{U}$. 这证明了(丙)中第三行的矩阵表示成立.

(iv) $SO(2n, \mathbf{C})/SO(2n)$：

证明完全与(ii)一样,即 $\Gamma\in SO(2n,\mathbf{C})$能唯一地分解为

$$\Gamma=AR,\ R\in SO(2n),$$

$$A=\Gamma_1P_0\left[\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{2}\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}\lambda_1}\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{2}\lambda_n} & 0\\ 0 & e^{\frac{1}{2}\lambda_n}\end{pmatrix}\right]P_0^{-1}\Gamma_1^{-1},$$

$$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,$$

其中 Γ_1是$2n$ 阶实正交方阵,P_0是一个排列方阵,这证明了(丙)中第四行的矩阵表示成立.

至此,所有 NIRGSS 的矩阵表示都已证完,读者可以由此看出,有哪些对称空间的函数论或几何不变量,从前已经有人做过;有哪一些还没有人做过,可以一试.

在表6.1(甲)中对第一行与第二行的空间分别将超曲面 $\det(I+T)=\det(I-T)$与 $\det(J+T)=\det(J-T)$去掉,则所有(甲)中的对称空间皆是超球,但此时(甲)中第一与第二行空间不是不可约.第一行的空间变为 $rS>0,\det S=1,r\in\mathrm{R}_+$,即是两个空间的拓扑积.在从超球 $I-TT'>0,T=T'$得出的热核后,经变换得出空间$\{rS>0,\det S=1,r\in\mathbf{R}\}$的热核,由于 $\mathbf{R}_+$的热核为$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{1}{4t}r^2}$,以此除之,便得空间$\{S>0,\det S=1\}$的热核.第二行的空间亦可用类似方法处理.

表6.1(乙)中的第一行与第二行的空间的几何性质似乎很少讨论过,因为一开始就用矩阵极坐标定义的,不过这里对角线方阵不是非负数,而是 $e^{i\theta_j}$.它在 $SU(n)$(或 $SU(2n)$)诱导的变换下,局部坐标表示是何种形式以及不变度量的矩阵表示、Morse 函数等皆是颇有兴趣的问题.至于(丙)类,就更少研究了,除了第一行$\{H>0,\det H=1\}$作者在文献[48]中曾提到过,其他三类也是一开始就是用矩阵极坐标定义的.

附　录

Kähler 流形上的外微分运算

1. Hermite 流形上的对偶算子 *

设 $\mathfrak{M}$ 是复 m 维 Hermite 流形，对于可容许局部坐标 $z=(z^1,\cdots,z^m)$，其 Hermite 度量为

$$ds^2 = h_{\alpha\bar{\beta}}(z)dz^\alpha \overline{dz}^\beta = dzH(a)dz^\dagger , \tag{1.1}$$

其中

$$H = H(z) = (h_{\alpha\bar{\beta}}(z))_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m} \tag{1.2}$$

是 Hermite 正定方阵. 记

$$H = A + iB, \tag{1.3}$$

其中 A 与 B 分别是对称与反称的实方阵. 由于 ds^2 是实的，故

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{2}(dzHdz^\dagger + \overline{dzH}dz') \\ &= \frac{1}{2}(dz,\overline{dz})\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & \overline{H} \end{pmatrix}(dz,\overline{dz})^\dagger . \end{aligned} \tag{1.4}$$

记

$$z^\alpha = x^\alpha + ix^{m+\alpha},\ \alpha = 1,\cdots,m. \tag{1.5}$$

令

$$x = (x^1,\cdots,x^{2m}),$$

则(1.4)式可写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= dxU^\dagger \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & \overline{H} \end{pmatrix}Udx' \\ &= dxGdx', \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中

$$U^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I^{(m)} & I \\ iI & -iI \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

是 $2m$ 阶酉方阵，

$$G = U^{\dagger}\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & \overline{H} \end{pmatrix}U = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (g_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant 2m} \tag{1.8}$$

是实的对称正定 $2m$ 阶方阵，因此

$$\mathrm{d}s^2 = h_{\alpha\beta}\mathrm{d}z^{\alpha}\,\overline{\mathrm{d}z^{\beta}} = g_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k. \tag{1.9}$$

式中拉丁字母指标 $j,k,\cdots$是由 1 到 $2m$；希腊字母指标 $\alpha,\beta,\cdots$是由 1 到 m.(1.9)式表示一 Hermite 度量，也是一黎曼度量.

对于黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 上的 p 次外微分式的对偶运算 $*$ 定义好之后，则对 Hermite 流形 $\mathfrak{M}$ 的(r,s)-式的对偶运算就应该确定了.因为(r,s)-式是 $2m$ 维黎曼流形的$(r+s)$次式，不过有复的系数，亦即它的虚 部与实部都是 $r+s$ 次式，而 $*$ 是线性算子.这里就是要从作为黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 的对偶运算 $*$ 推出对(r,s)-式对偶运算的公式，计算是比较复杂的，一般都把证明省略了.作者还未见到何处有详细证明.故在本附录中给出一个证明.

令(1.7)式定义的酉方阵 U 的逆方阵元素为

$$U = (E_j^k);\ U^{-1} = (\bar{e}_j^k)_{1\leqslant j,k\leqslant 2m}. \tag{1.10}$$

注意第 j 行第 k 列的元素是 $\bar{e}_j^k$.由于

$$(\mathrm{d}z,\overline{\mathrm{d}z}) = \sqrt{2}\,\mathrm{d}xU^{-1} = \sqrt{2}\,\mathrm{d}xU^{\dagger},$$

故有

$$\mathrm{d}z^{\alpha} = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x^j\bar{e}_{\alpha}^j,\ \overline{\mathrm{d}z^{\alpha}} = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x^j\bar{e}_{m+\alpha}^j = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x^je_{\alpha}^j,$$

$$\mathrm{d}x^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}z^{\lambda}E_{\lambda}^j + \overline{\mathrm{d}z^{\lambda}}E_{m+\lambda}^j) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}z^{\lambda}E_{\lambda}^j + \overline{\mathrm{d}z^{\lambda}}\overline{E}_{\lambda}^j). \tag{1.11}$$

$\mathfrak{M}$ 上的(r,s)-式

$$\omega_{r,s} = \frac{1}{r!s!}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s}\mathrm{d}z^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{\alpha_r}\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\beta_s}} \tag{1.12}$$

可写为

$$\omega_{r,s} = \frac{(\sqrt{2})^{r+s}}{(r+s)!} B_{l_1 \cdots l_{r+s}} \mathrm{d}x^{l_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{l_{r+s}}, \tag{1.13}$$

其中

$$B_{l_1 \cdots l_{r+s}} = \frac{1}{r!s!} A_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \beta_1 \cdots \beta_s} \bar{e}^{\alpha_1}_{j_1} \cdots \bar{e}^{\alpha_r}_{j_r} \times e^{\beta_1}_{k_1} \cdots e^{\beta_s}_{k_s} \delta^{j_1 \cdots j_r k_1 \cdots k_s}_{l_1 \cdots l_{r+s}}. \tag{1.14}$$

对偶运算 * 作用于作为黎曼流形 $\mathfrak{M}$ 的 $r+s$ 次式(1.13),根据文献[42]中(1.6.10)式,知

$$* \omega_{r,s} = \frac{(\sqrt{2})^{r+s} \sqrt{g}}{(r+s)!(2m-r-s)!} \delta^{1 \cdots 2m}_{j_1 \cdots j_{r+s} k_1 \cdots k_{2m-r-s}} \times B^{j_1 \cdots j_{r+s}} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_{2m-r-s}}, \tag{1.15}$$

其中

$$B^{j_1 \cdots j_{r+s}} = g^{j_1 k_1} \cdots g^{j_{r+s} k_{r+s}} B_{k_1 \cdots k_{r+s}}. \tag{1.16}$$

现在就是要把(1.14)式定义的 $B_{l_1 \cdots l_{r+s}}$ 代入上式及(1.15),再把 $* \omega_{r,s}$ 化为$(m-s, m-r)$-式.

引理 1.1

$$\delta^{1 \cdots 2m}_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_{2m-p}} E^{j_1}_{\lambda_1} \cdots E^{j_p}_{\lambda_p} \overline{E}^{k_1}_{\mu_1} \cdots \overline{E}^{k_{2m-p}}_{\mu_{2m-p}} = \begin{cases} 0, \text{当 } p \neq m; \\ (i)^m \delta^{1 \cdots m}_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} \delta^{1 \cdots m}_{\mu_1 \cdots \mu_m}, \text{ 当 } p = m. \end{cases}$$

证 由于

$$\delta^{1 \cdots 2m}_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_{2m-p}} E^{j_1}_{\lambda_1} \cdots E^{j_p}_{\lambda_p} \overline{E}^{k_1}_{\mu_1} \cdots \overline{E}^{k_{2m-p}}_{\mu_{2m-p}} = \begin{vmatrix} E^1_{\lambda_1} & \cdots & E^m_{\lambda_1} & E^{m+1}_{\lambda_1} & \cdots & E^{2m}_{\lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E^1_{\lambda_p} & \cdots & E^m_{\lambda_p} & E^{m+1}_{\lambda_p} & \cdots & E^{2m}_{\lambda_p} \\ \overline{E}^1_{\mu_1} & \cdots & \overline{E}^m_{\mu_1} & \overline{E}^{m+1}_{\mu_1} & \cdots & \overline{E}^{2m}_{\mu_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{E}^1_{\mu_{2m-p}} & \cdots & \overline{E}^m_{\mu_{2m-p}} & \overline{E}^{m+1}_{\mu_{2m-p}} & \cdots & \overline{E}^{2m}_{\mu_{2m-p}} \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

当 $p \neq m$ 时,p 及 $2m-p$ 中必有一个大于 m,上式希腊指标皆是由

1 到 m,即(1.17)定义的行列式中必有两行是相同的,故此行列式为 0.

当 $p=m$ 时,(1.17)的行列式 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 与 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 必须取 $1,\cdots,m$中不同的值才不为 0,否则必为零,此即行列式等于

$$\det U\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_m}\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_m} = (i)^m\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_m}\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_m}.$$

引理证毕. ▌

根据(1.14)～(1.16),

$$\begin{aligned}*\,\omega_{r,s}= & \frac{(\sqrt{2})^{r+s}\sqrt{g}}{(2m-r-s)!(r+s)!}g^{l_1m_1}\cdots g^{l_{r+s}m_{r+s}}\\ & \times\left\{\frac{1}{r!s!}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s}\bar{e}^{\alpha_1}_{i_1}\cdots\bar{e}^{\alpha_r}_{i_r}e^{\beta_1}_{j_1}\cdots e^{\beta_s}_{j_s}\delta^{i_1\cdots i_rj_1\cdots j_s}_{l_1\cdots l_{r+s}}\right\}\\ & \times\delta^{1\cdots 2m}_{m_1\cdots m_{r+s}k_1\cdots k_{2m-r-s}}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_{2m-r-s}},\end{aligned}\qquad(1.18)$$

其中 $g=\det G=(\det H)^2=h^2,\ h=\det H.$

由(1.8)知

$$\begin{pmatrix}H^{-1} & 0\\ 0 & \overline{H}^{-1}\end{pmatrix}U=UG^{-1},$$

此即

$$\bar{e}^{\alpha}_{k}g^{kl}=h^{\lambda\alpha}\bar{e}^{\lambda}_{l}=\overline{E}^{l}_{\lambda}h^{\lambda\alpha}.\qquad(1.19)$$

利用此公式计算

$$\begin{aligned}& e^{\bar{\alpha}_1}_{i_1}\cdots e^{\bar{\alpha}_r}_{i_r}e^{\beta_1}_{j_1}\cdots e^{\beta_s}_{j_s}\delta^{i_1\cdots i_rj_1\cdots j_s}_{l_1\cdots l_{r+s}}g^{l_1m_1}\cdots g^{l_{r-s}m_{r+s}}\\ & =\bar{e}^{\alpha_1}_{i_1}\cdots\bar{e}^{\alpha_r}_{i_r}e^{\beta_1}_{j_1}\cdots e^{\beta_s}_{j_s}\\ & \times\begin{vmatrix}g^{i_1m_1} & \cdots & g^{i_rm_1} & g^{j_1m_1} & \cdots & g^{j_sm_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g^{i_1m_r} & \cdots & g^{i_rm_r} & g^{j_1m_r} & \cdots & g^{j_sm_r}\\ g^{i_1m_{r+1}} & \cdots & g^{i_rm_{r+1}} & g^{j_1m_{r+1}} & \cdots & g^{j_sm_{r+1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g^{i_1m_{r+s}} & \cdots & g^{i_rm_{r+s}} & g^{j_1m_{r+s}} & \cdots & g^{j_sm_{r+s}}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\times\begin{vmatrix} \overline{e^{\alpha_1}_{i_1}}g^{i_1m_1} & \cdots & \overline{e^{\alpha_r}_{i_r}}g^{i_rm_1} & e^{\beta_1}_{j_1}g^{j_1m_1} & \cdots & e^{\beta_s}_{j_s}g^{j_sm_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{e^{\alpha_1}_{i_1}}g^{i_1m_r} & \cdots & \overline{e^{\alpha_r}_{i_r}}g^{i_rm_r} & e^{\beta_1}_{j_1}g^{j_1m_r} & \cdots & e^{\beta_s}_{j_s}g^{j_sm_r} \\ \overline{e^{\alpha_1}_{i_1}}g^{i_1m_{r+1}} & \cdots & \overline{e^{\alpha_r}_{i_r}}g^{i_rm_{r+1}} & e^{\beta_1}_{j_1}g^{j_1m_{r+1}} & \cdots & e^{\beta_s}_{j_s}g^{j_sm_{r+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{e^{\alpha_1}_{i_1}}g^{i_1m_{r+s}} & \cdots & \overline{e^{\alpha_r}_{i_r}}g^{i_rm_{r+s}} & e^{\beta_1}_{j_1}g^{j_1m_{r+s}} & \cdots & e^{\beta_s}_{j_s}g^{j_sm_{r+s}} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\overline{E^{m_1}_{\lambda_1}} & \cdots & h^{\bar\lambda_r\alpha_r}\overline{E^{m_1}_{\lambda_1}} & h^{\bar\beta_1\mu_1}E^{m_1}_{\mu_1} & \cdots & h^{\bar\beta_s\mu_s}E^{m_1}_{\mu_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\overline{E^{m_{r+s}}_{\lambda_1}} & \cdots & h^{\bar\lambda_r\alpha_r}\overline{E^{m_{r+s}}_{\lambda_1}} & h^{\bar\beta_1\mu_1}E^{m_{r+s}}_{\mu_1} & \cdots & h^{\bar\beta_s\mu_s}E^{m_{r+s}}_{\mu_s} \end{vmatrix}$$

$$= h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\bar\lambda_r\alpha_r}h^{\bar\beta_1\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_s}$$

$$\times\begin{vmatrix} \overline{E^{m_1}_{\lambda_1}} & \cdots & \overline{E^{m_1}_{\lambda_r}} & E^{m_1}_{\mu_1} & \cdots & E^{m_1}_{\mu_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{E^{m_{r+s}}_{\lambda_1}} & \cdots & \overline{E^{m_{r+s}}_{\lambda_r}} & E^{m_{r+s}}_{\mu_1} & \cdots & E^{m_{r+s}}_{\mu_s} \end{vmatrix}$$

$$= h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\bar\lambda_r\alpha_r}h^{\bar\beta_1\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_s}$$

$$\times\ \delta^{m_1\cdots m_{r+s}}_{l_1\cdots l_{r+s}}\overline{E}^{l_1}_{\lambda_1}\cdots\overline{E}^{l_r}_{\lambda_r}E^{l_{r+1}}_{\mu_1}\cdots E^{l_{r+s}}_{\mu_s}. \tag{1.20}$$

将上式代入(1.18),并利用(1.11),得

$$*\,\omega_{r,s}=\frac{(\sqrt{2})^{r+s}h}{r!s!}h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\bar\lambda_r\alpha_r}h^{\bar\beta_1\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_s}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$$

$$\times\left\{\frac{1}{(2m-r-s)!(r+s)!}\overline{E}^{l_1}_{\lambda_1}\cdots\overline{E}^{l_r}_{\lambda_r}E^{l_{r+1}}_{\mu_1}\cdots\right.$$

$$\left.\times\ E^{l_{r+s}}_{\mu_s}\delta^{m_1\cdots m_{r+s}}_{l_1\cdots l_{r+s}}\delta^{1\cdots 2m}_{m_1\cdots m_{r+s}k_1\cdots k_{2m-r+s}}\right\}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_{2m-r+s}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^{-2(m-r-s)}}{r!s!}hh^{\bar\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\bar\lambda_r\alpha_r}h^{\bar\beta_1\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_s}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$$

$$\times\left\{\frac{1}{(2m-r-s)!}\overline{E}^{l_1}_{\lambda_1}\cdots\overline{E}^{l_r}_{\lambda_r}E^{l_{r+1}}_{\mu_1}\cdots E^{l_{r+s}}_{\mu_s}\delta^{1\cdots 2m}_{l_1\cdots l_{r+s}k_1\cdots k_{2m-r-s}}\right\}$$

$$\times\ (\mathrm{d}z^{\nu_1}E^{k_1}_{\nu_1}+\overline{\mathrm{d}z}^{\nu_1}E^{k_1}_{\nu_1})\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}z^{\nu_{2m-r-s}}E^{k_{2m-r+s}}_{\nu_{2m-r-s}}$$

$$+\overline{dz}^{\nu_{2m-r-s}}\overline{E}^{k_{2m-r-s}}_{\nu_{2m-r-s}}).$$

根据引理 1.1,上式中 dz^α 的次数必为 $m-s$,否则为 0,而 dz^α 为 $m-s$次的项有

$$C^{2m-r-s}_{m-s}=\frac{(2m-r-s)!}{(m-s)!(m-r)!}\text{ 项},$$

因此再用引理 1.1,得

$$\begin{aligned}
*\omega_{r,s}=&\frac{h}{2^{m-r-s}(m-r)!(m-s)!r!s!}A^{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}\\
&\times\delta^{1\cdots 2m}_{l_1\cdots l_{r+s}k_1\cdots k_{2m-r-s}}\overline{E}^{l_1}_{\lambda_1}\cdots\overline{E}^{l_r}_{\lambda_r}E^{l_{r+1}}_{\mu_1}\cdots E^{l_{r+s}}_{\mu_s}\\
&\times E^{k_1}_{\sigma_1}\cdots E^{k_{m-s}}_{\sigma_{m-s}}\overline{E}^{k_{m-s+1}}_{\tau_1}\cdots\overline{E}^{k_{2m-r-s}}_{\tau_{m-r}}dz^{\sigma_1}\wedge\\
&\cdots\wedge dz^{\sigma_{m-s}}\wedge\overline{dz}^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge\overline{dz}^{\tau_{m-r}}\\
=&\frac{i^m(-1)^{mr}h}{2^{m-r-s}(m-r)!(m-s)!r!s!}A^{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}\\
&\times\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}}\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}dz^{\sigma_1}\wedge\\
&\cdots\wedge dz^{\sigma_{m-s}}\wedge\overline{dz}^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge\overline{dz}^{\tau_{m-r}},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A^{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}=&h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\bar\lambda_r\alpha_r}h^{\bar\beta_1\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_s}\\&\times A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}.\end{aligned}\tag{1.21}$$

我们证明了对具有度量(1.1)的 Hermite 流形,

$$\begin{aligned}&*\left(\frac{1}{r!s!}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge\overline{dz}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\overline{dz}^{\beta_s}\right)\\
&=\frac{i^m(-1)^{mr}h}{2^{m-r-s}(m-r)!(m-s)!r!s!}A^{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}}\\
&\times\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}dz^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\sigma_{m-s}}\wedge\overline{dz}^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge\overline{dz}^{\tau_{m-r}}.\end{aligned}\tag{1.22}$$

特别是

$$*1=\left(\frac{i}{2}\right)^m h dz^1\wedge\cdots\wedge dz^m\wedge\overline{dz}^1\wedge\cdots\wedge\overline{dz}^m,\tag{1.23}$$

这是 $\mathfrak{M}$ 的体积元素,根据文献[42]中的(1.6.12),有

$$**\omega_{r,s}=(-1)^{r+s}\omega_{r,s}.\tag{1.24}$$

2. Kähler 流形的 ∂^* 算子

现仅考虑 $\mathfrak{M}$ 是 Kähler 流形的情形. 已经知道

$$d = \partial + \bar{\partial}. \tag{2.1}$$

由 $h_{\alpha\bar{\beta}}$ 可定义 Kähler 联络

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial h_{\beta\bar{\lambda}}}{\partial z^{\gamma}} h^{\bar{\lambda}\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}. \tag{2.2}$$

因此有

$$\begin{aligned}\partial\omega_{r,s} &= \frac{1}{r!s!}\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_1\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s} dz^{\alpha} \wedge dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \\ &\quad \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz}^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \overline{dz}^{\beta_s} \\ &= \frac{1}{r!s!} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\alpha} dz^{\alpha} \wedge dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \\ &\quad \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz}^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \overline{dz}^{\beta_s},\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{\alpha_1\cdots\alpha_1\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\alpha} &= \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_1\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{r} \Gamma^{\beta}_{\alpha_j\alpha} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\beta\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}\end{aligned} \tag{2.4}$$

是张量 $A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s}$ 对 z^{α} 的协变量微分. (2.3)式中的系数不是对指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha$ 反称的. 根据规定,要求把它反称化,因此

$$\begin{aligned}\partial\omega_{r,s} &= \frac{1}{(r+1)!s!r!} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\alpha} \delta^{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\gamma_1\cdots\gamma_{r+1}} \\ &\quad \times dz^{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\gamma_{r+1}} \wedge \overline{dz}^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \overline{dz}^{\beta_s}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

同理,可有

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\omega_{r,s} &= \frac{(-1)^r}{r!(s+1)!s!} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\beta}} \delta^{\beta\beta_1\cdots\beta_s}_{\gamma_1\cdots\gamma_{s+1}} \\ &\quad \times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz}^{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge \overline{dz}^{\gamma_{s+1}}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

在文献[42]中,算子 δ 定义为(对实偶维流形)

$$\delta = - * \mathrm{d} * = - * (\partial + \bar{\partial}) * = \partial^* + \bar{\partial}^*, \tag{2.7}$$

其中

$$\partial^* = - * \bar{\partial} * , \bar{\partial}^* = - * \partial * . \tag{2.8}$$

注意,算子 ∂^* 把(r,s)-式变为$(r-1,s)$-式,而$\overline{\partial^*}$变为$(r,s-1)$-式.此外,由(1.22)式可知

$$\overline{* \omega_{r,s}} = * \bar{\omega}_{r,s}, \text{ 因而} \overline{\partial^* \omega_{r,s}} = \bar{\partial}^* \bar{\omega}_{r,s}. \tag{2.9}$$

由方阵 δ^α_β 的协变微分

$$\delta^\alpha_{\beta;\gamma} = \frac{\partial}{\partial z^\gamma}\delta^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma}\delta^\lambda_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\delta^\alpha_\lambda = 0,$$

根据 Kronecker δ 的定义(例见文献[42]中(1.1.9)式)

$$\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_r;\gamma} = 0. \tag{2.10}$$

由(1.22)与(2.6)可知

$$\begin{aligned}\bar{\partial} * \omega_{r,s} = &\frac{(-1)^{m-s}}{(m-r+1)!}\Bigg[\frac{i^m(-1)^{mr}h}{2^{m-r-s}(m-r)!(m-s)!r!s!}\\ &\times A^{\lambda_1\cdots\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}_{\tau}\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}}\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}\Bigg]\\ &\times \delta^{\tau_1\cdots\tau_{m-r}}_{\nu_1\cdots\nu_{m-r+1}}\mathrm{d}z^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{\sigma_{m-s}}\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\nu_1}}\wedge\cdots\\ &\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\nu_{m-r+1}}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\partial^*\omega_{r,s} = &\frac{i^m(-1)^{m(m-s)+1}h}{(r-1)!s!2^{-m+r+s-1}}\\ &\times\Bigg\{\Bigg[\frac{(-1)^{m-s}i^m(-1)^{mr}h}{2^{m-r-s}(m-r+1)!(m-r)!(m-s)!r!s!}\\ &\times A^{\lambda_1\cdots\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}_{\tau}\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}}\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}\Bigg]\delta^{\tau_1\cdots\tau_{m-r}}_{\nu_1\cdots\nu_{m-r+1}}\Bigg\}\\ &\times h^{\xi_1\sigma_1}\cdots h^{\xi_{m-s}\sigma_{m-s}}h^{\nu_1\eta_1}\cdots h^{\overline{\nu_{m-r+1}}\eta_{m-r+1}}\\ &\times\delta^{1\cdots m}_{\xi_1\cdots\xi_{m-s}\zeta_1\cdots\zeta_s}\delta^{1\cdots m}_{\eta_1\cdots\eta_{m-r+1}\chi_1\cdots\chi_{r-1}}\mathrm{d}z^{\chi_1}\wedge\cdots\\ &\wedge\mathrm{d}z^{\chi_{r-1}}\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\zeta_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z^{\zeta_s}}\\ = &\frac{2(-1)^{mr+ms+m+s+1}h^2}{(m-r+1)!(m-r)!(m-s)!(r-1)!r!(s!)^2}\end{aligned}$$

$$\times \left\{ h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\bar\lambda_r\alpha_r} h^{\bar\beta_1\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\tau} \right.$$

$$\left. \times\, \delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}} \delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}} \delta^{\tau_1\cdots\tau_{m-r}}_{\nu_1\cdots\nu_{m-r+1}} \right\}$$

$$\times\, h^{\bar\xi_1\sigma_1}\cdots h^{\bar\xi_{m-s}\sigma_{m-s}} h^{\bar\nu_1\eta_1}\cdots h^{\bar\nu_{m-r+1}\eta_{m-r+1}}$$

$$\times\, \delta^{1\cdots m}_{\xi_1\cdots\xi_{m-s}\zeta_1\cdots\zeta_s} \delta^{1\cdots m}_{\eta_1\cdots\eta_{m-r+1}\chi_1\cdots\chi_{r-1}} \mathrm{d}z^{\chi_1} \wedge \cdots$$

$$\wedge\, \mathrm{d}z^{\chi_{r-1}} \wedge \overline{dz^{\zeta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\zeta_s}}.$$

令常数因子为

$$c(r,s) = \frac{2(-1)^{mr+ms+m+s+1}}{(m-r+1)!(m-r)!(m-s)!(r-1)!r!(s!)^2}, \tag{2.11}$$

则上式即

$$\partial^*\omega_{r,s} = c(r,s)h^2\Big[(m-r+1)!\,h^{\bar\tau\eta_1}h^{\bar\tau_1\eta_2}\cdots$$

$$\times\, h^{\bar\tau_{m-r}\eta_{m-r+1}} h^{\bar\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\bar\lambda_r\alpha_r}\cdot \delta^{1\cdots m}_{\bar\lambda_1\cdots\bar\lambda_r\bar\tau_1\cdots\bar\tau_{m-r}}\Big]$$

$$\times \Big[h^{\bar\xi_1\sigma_1}\cdots h^{\bar\xi_{m-s}\sigma_{m-s}} h^{\bar\beta_1\mu_1}\cdots h^{\bar\beta_s\mu_s} \delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}\Big]$$

$$\times\, \delta^{1\cdots m}_{\xi_1\cdots\xi_{m-s}\zeta_1\cdots\zeta_s} \delta^{1\cdots m}_{\eta_1\cdots\eta_{m-r+1}\chi_1\cdots\chi_{r-1}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\tau}$$

$$\times\, \mathrm{d}z^{\chi_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{\chi_{r-1}} \wedge \overline{\mathrm{d}z^{\zeta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}z^{\zeta_s}}$$

$$= c(r,s)(m-r+1)!\,h^2 h^{\bar\tau\eta_1} \frac{1}{h} \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_r\eta_2\cdots\eta_{m-r+1}}_{1\cdots m}$$

$$\times \frac{1}{h} \delta^{\beta_1\cdots\beta_s\xi_1\cdots\xi_{m-s}}_{1\cdots m} \delta^{1\cdots m}_{\xi_1\cdots\xi_{m-s}\zeta_1\cdots\zeta_s} \delta^{1\cdots m}_{\eta_1\cdots\eta_{m-r+1}\chi_1\cdots\chi_{r-1}}$$

$$\times\, A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\tau} \mathrm{d}z^{\chi_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{\chi_{r-1}} \wedge \overline{\mathrm{d}z^{\zeta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}z^{\zeta_s}}$$

$$= c(r,s)(m-r+1)!\,h^{\bar\tau\eta_1}(-1)^{(r-1)(m-r)}(m-r)!$$

$$\times\, \delta^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\eta_1\chi_1\cdots\chi_{r-1}} (-1)^{(m-s)s}(m-s)!\,\delta^{\beta_1\cdots\beta_s}_{\zeta_1\cdots\zeta_s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\tau}$$

$$\times\, \mathrm{d}z^{\chi_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{\chi_{r-1}} \wedge \overline{\mathrm{d}z^{\zeta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}z^{\zeta_s}}$$

$$= c(r,s)(-1)^{(r-1)(m-r)+(m-s)s}(m-r+1)!$$

$$\times (m-r)!(m-s)!r!s!h^{\bar{\tau}\eta_1}A_{\eta_1\chi_1\cdots\chi_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\tau}}dz^{\chi_1}\wedge\cdots$$
$$\wedge dz^{\chi_{r-1}}\overline{dz^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dz^{\beta_s}}.$$

将(2.11)代入上式，即得

$$\partial^*\omega_{r,s}=\frac{2}{(r-1)!s!}h^{\bar{\tau}\sigma}A_{\sigma\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\tau}}$$
$$\times dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_{r-1}}\wedge\overline{dz^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dz^{\beta_s}}. \tag{2.12}$$

同法可证

$$\bar{\partial}^*\omega_{r,s}=\frac{2(-1)^r}{r!(s-1)!}h^{\bar{\tau}\sigma}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar{\tau}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{s-1};\sigma}$$
$$\times dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge\overline{dz^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dz^{\beta_{s-1}}}. \tag{2.13}$$

由(2.12)及(2.6)可得

$$\bar{\partial}\partial^*\omega_{r,s}=\frac{2(-1)^{r-1}}{(r-1)!(s+1)!s!}h^{\bar{\lambda}\mu}A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\lambda}\bar{\nu}}$$
$$\times\delta^{\nu\beta_1\cdots\beta_s}_{\gamma_1\cdots\gamma_{s+1}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_{r-1}}\wedge\overline{dz^{\gamma_1}}$$
$$\wedge\cdots\wedge\overline{dz^{\gamma_{s+1}}} \tag{2.14}$$

及

$$\partial^*\bar{\partial}\omega_{r,s}=\frac{2(-1)^r}{(r-1)!(s+1)!s!}h^{\bar{\lambda}\mu}A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\nu}\bar{\lambda}}$$
$$\times\delta^{\nu\beta_1\cdots\beta_s}_{\gamma_1\cdots\gamma_{s+1}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_{r-1}}\wedge\overline{dz^{\gamma_1}}$$
$$\wedge\cdots\wedge\overline{dz^{\gamma_{s+1}}}. \tag{2.15}$$

若我们能证明

$$A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\lambda}\bar{\nu}}=A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_s;\bar{\nu}\bar{\lambda}}, \tag{2.16}$$

则由(2.14)、(2.15)得出

$$(\bar{\partial}\partial^*+\partial^*\bar{\partial})\omega_{r,s}=0,$$

即

$$\bar{\partial}\partial^*+\partial^*\bar{\partial}=0. \tag{2.17}$$

同法可证

$$\partial\overline{\partial^*}+\overline{\partial^*}\partial=0. \tag{2.18}$$

引理2.1　令

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}=\frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}-\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}+\Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}_{\beta\lambda}-\Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu},$$

则

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\equiv 0.$$

证　以 $dz^{\lambda}\wedge dz^{\mu}$ 乘上式的两端并对 λ、μ 求和，得

$$\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}dz^{\lambda}\wedge dz^{\mu}=\partial(\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}dz^{\lambda})-\Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}dz^{\lambda}\wedge\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}dz^{\mu}.$$

写为矩阵形式，即为

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}dz^{\lambda}\wedge dz^{\mu}\right)&=\partial(\partial H\cdot H^{-1})\\&\quad-\partial H\cdot H^{-1}\wedge\partial H\cdot H^{-1}\\&\equiv 0.\end{aligned}$$

引理证毕.　▍

由于

$$\begin{aligned}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\lambda}=&\frac{\partial}{\partial\bar z^{\lambda}}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}\\&-\sum_{j=1}^{s}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{j-1}\bar\beta\bar\beta_{j+1}\cdots\bar\beta_s}\overline{\Gamma^{\beta}_{\beta_j\lambda}},\end{aligned}$$

经计算可知

$$\begin{aligned}&A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\lambda\bar\mu}-A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\mu\bar\lambda}\\&=\sum_{j=1}^{s}A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta\bar\beta_{j+1}\cdots\bar\beta_s}\overline{R^{\beta}_{\beta_j\lambda\mu}}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

根据引理2.1，上式恒为0，故(2.16)式成立.

3. Kähler 流形的调和算子 Δ

根据(2.12)及(2.5)有

$$\partial\partial^*\omega_{r,s}=\frac{2}{r!s!}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}h^{\bar\lambda\mu}A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\bar\lambda\alpha_j}$$

$$\times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}. \tag{3.1}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\partial^* \partial \omega_{r,s} = & \frac{1}{(r+1)!s!} \partial^* \Bigg\{ \Bigg[A_{\alpha_2 \cdots \alpha_{r+1} \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \alpha_1} \\
& + \sum_{j=2}^{r+1} (-1)^{j-1} A_{\alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} \alpha_{j+1} \cdots \alpha_{r+1} \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \alpha_j} \Bigg] \\
& \times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_{r+1}} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}} \Bigg\} \\
= & \frac{2}{r!s!} h^{\bar{\lambda}\mu} \Bigg\{ A_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \mu \bar{\lambda}} \\
& + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j} A_{\mu \alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} \alpha_{j+1} \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \alpha_j \bar{\lambda}} \Bigg\} \\
& \times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

因此有

$$\begin{aligned}
(\partial\partial^* + \partial^* \partial) \omega_{r,s} = & \frac{2}{r!s!} h^{\bar{\lambda}\mu} \Bigg\{ A_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \mu \bar{\lambda}} \\
& + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} \Bigg[A_{\mu \alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} \alpha_{j+1} \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \bar{\lambda} \alpha_j} \\
& - A_{\mu \alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} \alpha_{j+1} \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \alpha_j \bar{\lambda}} \Bigg] \Bigg\} \\
& \times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

引理3.1 $A_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \bar{\lambda}\mu} - A_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s ; \mu \bar{\lambda}}$

$$\begin{aligned}
= & - \sum_{j=1}^{r} A_{\alpha_1 \cdots \alpha_j \alpha \alpha_{j+1} \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_s} R^{\alpha}_{\alpha_j \mu \bar{\lambda}} \\
& + \sum_{k=1}^{s} A_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_{k-1} \bar{\beta} \bar{\beta}_{k+1} \cdots \bar{\beta}_s} \overline{R^{\beta}_{\beta_k \lambda \bar{\mu}}},
\end{aligned}$$

其中

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\bar{\lambda}} = - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\lambda}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}$$

是西曲率张量.

证 实际上,公式(2.19)与本引理皆称为 Ricci 公式.

由于

$$
\begin{aligned}
& A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s;\mu} \\
&= \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s}\Gamma^{\alpha}_{\alpha_j\mu},
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
& A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s;\mu\overline{\lambda}} \\
&= \frac{\partial}{\partial\overline{z}^{\lambda}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s;\mu} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_{k-1}\overline{\beta}\overline{\beta}_{k+1}\cdots\overline{\beta}_s;\mu}\overline{\Gamma^{\beta}_{\beta_k\lambda}} \\
&= \frac{\partial}{\partial\overline{z}^{\lambda}\partial z^{\mu}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s}\frac{\partial}{\partial\overline{z}^{\lambda}}\Gamma^{\alpha}_{\alpha_j\mu} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{z}^{\lambda}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s}\right]\Gamma^{\alpha}_{\alpha_j\mu} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\partial}{\partial z^{\mu}} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_{k-1}\overline{\beta}\overline{\beta}_{k+1}\cdots\overline{\beta}_s}\right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{r} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_{k-1}\overline{\beta}\overline{\beta}_{k+1}\cdots\overline{\beta}_s}\Gamma^{\alpha}_{\alpha_j\mu}\right]\overline{\Gamma^{\beta}_{\beta_k\lambda}}.
\end{aligned}
$$

同样可计算

$$
A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\overline{\beta}_1\cdots\overline{\beta}_s;\overline{\lambda}\mu}.
$$

然后将两式相减便得引理. ∎

用此引理与(3.3)式,得

$(\partial\partial^* + \partial^*\partial)\omega_{r,s}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{r!s!} h^{\lambda\mu} \Big\{ A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\mu\bar\lambda} + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} \\
&\times \Big[\sum_{k=1}^{s} A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{k-1}\bar\beta\bar\beta_{k+1}\cdots\bar\beta_s} \overline{R^{\beta}_{\beta_k\lambda\bar\alpha_j}} \\
&- A_{\tau\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s} R^{\tau}_{\mu\alpha_j\bar\lambda} \\
&- \sum_{l=1}^{j-1} A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\tau\alpha_{l+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s} R^{\tau}_{\alpha_l\alpha_j\bar\lambda} \\
&- \sum_{l=j+1}^{r} A_{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{l-1}\tau\alpha_{l+1}\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s} R^{\tau}_{\alpha_l\alpha_j\bar\lambda} \Big] \Big\} \\
&\times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

从 $R^{\gamma}_{\alpha\beta\bar\lambda}$的定义知道，它对指标 α 与 β 是对称的，因此

$$
R^{\tau}_{\alpha_l\alpha_j\bar\lambda} dz^{\alpha_l} \wedge dz^{\alpha_j} = 0.
$$

(3.4)式化为

$$
\begin{aligned}
&(\partial\partial^* + \partial^*\partial)\omega_{r,s} \\
&= \frac{2}{r!s!} h^{\bar\lambda\mu} \Big\{ A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\mu\bar\lambda} \\
&+ \sum_{j=1}^{r} \sum_{r=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\mu\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{k-1}\bar\beta\bar\beta_{k+1}\cdots\bar\beta_s} \overline{R^{\beta}_{\beta_k\lambda\alpha_j}} \\
&- \sum_{j=1}^{r} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\tau\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s} R^{\tau}_{\mu\alpha_l\bar\lambda} \Big\} \\
&\times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

同法可证

$$
\begin{aligned}
&(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\omega_{r,s} \\
&= \frac{2}{r!s!} h^{\lambda\mu} \Big\{ A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s;\lambda\mu} \\
&+ \sum_{j=1}^{r} \sum_{r=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\tau\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{k-1}\bar\lambda\bar\beta_{k+1}\cdots\bar\beta_r} \\
&\times R^{\tau}_{\mu\alpha_j\bar\beta_k} - \sum_{k=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{k-1}\bar\tau\bar\beta_{k+1}\cdots\bar\beta_s} \overline{R^{\tau}_{\beta_k\lambda\bar\mu}} \Big\}
\end{aligned}
$$

$$\times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}. \qquad (3.6)$$

利用 Kähler 几何的性质，有

$$\overline{R_{\lambda\alpha\beta\mu}} = R_{\alpha\lambda\mu\beta} = R_{\bar{\alpha}\mu\lambda\bar{\beta}}, \quad R_{\lambda\alpha\beta\bar{\mu}} = h_{\tau\bar{\lambda}} R^{\tau}_{\alpha\beta\mu}, \qquad (3.7)$$

便可证明

$$\begin{aligned} & h^{\lambda\mu} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\mu\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_{k-1}\bar{\beta}\beta_{k+1}\cdots\beta_s} \overline{R^{\beta}_{\beta_k\lambda\bar{\alpha}_j}} \\ &= h^{\lambda\mu} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\tau\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_{k-1}\bar{\lambda}\beta_{k+1}\cdots\beta_s} R^{\tau}_{\mu\alpha_j\beta_k}. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

由(3.5)与(3.6)相减，得

$$\begin{aligned} & (\partial\partial^* + \partial^*\partial)\omega_{r,s} - (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})\omega_{r,s} \\ &= \frac{2}{r!s!} h^{\lambda\mu} \Big\{ A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s;\mu\lambda} - A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s;\lambda\mu} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{r} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\tau\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s} R^{\tau}_{\mu\alpha_j\lambda} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_{k-1}\tau\beta_{k+1}\cdots\beta_s} \overline{R^{\tau}_{\beta_k\lambda\mu}} \Big\} \\ &\quad \times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

应用 Ricci 恒等式(即引理3.1)，上式等于零，这证明了

$$\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} = \partial\partial^* + \partial^*\partial. \qquad (3.10)$$

根据此式及(2.17)、(2.18)得出

$$\begin{aligned} \Delta &= d\delta + \delta d = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial) = 2(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) \\ &= \frac{4}{r!s!} \Big\{ h^{\lambda\mu} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s;\mu\bar{\lambda}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\mu\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_{k-1}\bar{\beta}\beta_{k+1}\cdots\beta_k} \\ &\quad \times h^{\lambda\mu} \overline{R^{\beta}_{\beta_k\lambda\alpha_j}} - \sum_{j=1}^{r} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\tau\alpha_{j+1}\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s} h^{\sigma\tau} R_{\alpha_j\sigma} \Big\} \\ &\quad \times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}} \\ &= \frac{4}{r!s!} \Big\{ h^{\lambda\mu} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s;\lambda\mu} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\tau\alpha_{j+1}\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{k-1}\bar\lambda\bar\beta_{k+1}\cdots\bar\beta_s} h^{\bar\lambda\mu} R^{\tau}_{\mu\alpha_j\bar\beta_k}$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{s} A_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{k-1}\bar\tau\bar\beta_{k+1}\cdots\bar\beta_s} h^{\bar\tau\sigma} R_{\sigma\bar\beta_k} \right\}$$

$$\times dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}, \qquad (3.11)$$

其中

$$R_{\alpha\bar\beta} = h^{\bar\lambda\mu} R_{\bar\lambda\mu\alpha\bar\beta} \qquad (3.12)$$

称为 Ricci 张量.

由于

$$\begin{aligned} * \Delta\omega_{r,s} &= 2 * (\partial * \bar\partial * + * \bar\partial * \partial)\omega_{r,s} \\ &= 2[* \partial * \bar\partial * + (-1)^{2n-r-s}\bar\partial * \partial]\omega_{r,s} \\ &= 2[* \partial * \bar\partial * + \bar\partial * \partial * *]\omega_{r,s} \\ &= 2(\bar\partial^* \bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*) * \omega_{r,s} \\ &= \Delta * \omega_{r,s}, \end{aligned}$$

故有

$$* \Delta = \Delta * . \qquad (3.13)$$

4. Kähler 流形的内积

设 $\mathfrak{M}$ 是一 Hermite 流形,具有 Hermite 度量(1.1),

$$\mathfrak{a}_{r,s} = \frac{1}{r!s!} A_{\alpha_1\cdots\alpha_1\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}(z) dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}$$

与

$$\mathfrak{b}_{r,s} = \frac{1}{r!s!} B_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}(z) dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge da^{\alpha_r} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{\beta_s}}$$

是 $\mathfrak{M}$ 中有二阶连续微分的(r,s)-式. 根据(1.22),有

$$\mathfrak{b} * \bar{\mathfrak{a}} = \frac{i^m(-1)^{mr}h}{2^{m-r-s}(m-r)!(m-s)!(r!)^2(s!)^2} B_{\alpha_1\cdots\alpha_r\bar\beta_1\cdots\bar\beta_s}$$

$$\times \overline{A}^{\lambda_1\cdots\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}}\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}$$
$$\times dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge\overline{dz^{\beta_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dz^{\beta_s}}$$
$$\wedge\overline{dz^{\sigma_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dz^{\sigma_{m-s}}}\wedge da^{\tau_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\tau_{m-r}}$$
$$=\frac{(-i)^m(-1)^{mr}(-1)^{(m-r)m}h(z)}{2^{m-r-s}(m-r)!(m-s)!(r!)^2(s!)^2}$$
$$\times B_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s}\overline{A}^{\lambda_1\cdots\lambda_r\mu_1\cdots\mu_s}\delta^{1\cdots m}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}}$$
$$\times\delta^{1\cdots m}_{\mu_1\cdots\mu_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_r\tau_1\cdots\tau_{m-r}}_{1\cdots m}\delta^{\beta_1\cdots\beta_s\sigma_1\cdots\sigma_{m-s}}_{1\cdots m}$$
$$\times dz^1\wedge\cdots\wedge dz^m\wedge\overline{dz^1}\wedge\cdots\wedge\overline{dz^m}$$
$$=\frac{i^m h(z)}{2^{m-r-s}r!s!}B_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s}\overline{A}^{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s}$$
$$\times dz^1\wedge\cdots\wedge dz^m\wedge\overline{dz^1}\wedge\cdots\wedge\overline{dz^m}. \tag{4.1}$$

注意,这里用到了

$$\overline{(*\mathfrak{a})}=*\overline{\mathfrak{a}}, \tag{4.2}$$

这从 $*$ 的公式(1.22)可以看出.根据(1.23)可知(4.1)即为

$$\mathfrak{b}*\overline{\mathfrak{a}}=\frac{2^{r+s}}{r!s!}h^{\lambda_1\alpha_1}\cdots h^{\lambda_r\alpha_r}h^{\beta_1\mu_1}\cdots h^{\beta_r\mu_r}.$$
$$B_{\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\cdots\beta_s}\overline{A}_{\lambda_1\cdots\lambda_r\overline{\mu}_1\cdots\overline{\mu}_s}*1. \tag{4.3}$$

由此可见

$$\overline{(\mathfrak{b}*\overline{\mathfrak{a}})}=\mathfrak{a}*\overline{\mathfrak{b}} \tag{4.4}$$

及

$$\mathfrak{a}*\overline{\mathfrak{a}}\geqslant 0,\text{等号成立当且仅当 }\mathfrak{a}=0. \tag{4.5}$$

我们定义

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\int_{\mathfrak{M}}\mathfrak{a}*\overline{\mathfrak{b}}, \tag{4.6}$$

当 $\mathfrak{M}$ 为紧的,或者当 $\mathfrak{a}$ 或 $\mathfrak{b}$ 有紧支集时,上面的积分是存在的.

此外,由(4.3)知,

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{a})=0\quad\text{当且仅当 }\mathfrak{a}=0. \tag{4.7}$$

若 $\mathfrak{a}$ 是$(r,s-1)$-式, $\mathfrak{b}$ 是(r,s)-式,则根据(1.24),有

$$d(\mathfrak{a}\wedge*\overline{\mathfrak{b}})=\overline{\partial}\mathfrak{a}\wedge*\overline{\mathfrak{b}}+(-1)^{r+s-1}\mathfrak{a}\wedge\overline{\partial}*\overline{\mathfrak{b}}$$

$$= \bar{\partial}\mathfrak{a} \wedge \bar{\mathfrak{b}} + \mathfrak{a} \wedge * * \bar{\partial} * \bar{\mathfrak{b}}$$

$$= \bar{\partial}\mathfrak{a} * \bar{\mathfrak{b}} - \mathfrak{a} \wedge * \overline{\bar{\partial}^* \mathfrak{b}}. \tag{4.8}$$

这里利用了

$$\overline{(\partial^* \omega)} = \bar{\partial}^* \bar{\omega}. \tag{4.9}$$

这可从 ∂^* 与 $\overline{\partial^*}$ 的定义(2.12)及(2.13)看出. 注意,现在 $\mathfrak{M}$ 是 Hermite 流形,如果我们引进联络

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{\beta\lambda}}{\partial z^\gamma} + \frac{\partial h_{\gamma\lambda}}{\partial z^\beta}\right) h^{\lambda\alpha}, \tag{4.10}$$

则公式(2.12)与(2.13)对 Hermite 流形仍然成立. 因为

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \tag{4.11}$$

是对 β 与 γ 对称的.

由(4.8)可知

$$(\bar{\partial}\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}, \bar{\partial}^* \mathfrak{b}) = \int_{\mathfrak{M}} d(\mathfrak{a} * \bar{\mathfrak{b}}). \tag{4.12}$$

因此当 $\mathfrak{M}$ 为紧的,或者 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 有一个有紧支集时,有

$$(\bar{\partial}\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \bar{\partial}^* \mathfrak{b}). \tag{4.13}$$

同理可证,当 $\mathfrak{a}$ 是(r,s)-式,$\mathfrak{b}$ 是$(r+1,s)$-式,而 $\mathfrak{M}$ 为紧的或者 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 有一个紧支集时,则

$$(\partial\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \partial^* \mathfrak{b}). \tag{4.14}$$

现设 $\mathfrak{M}$ 是 Kähler 流形,由本附录第2节已知

$$\Delta = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial) = 2(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}).$$

(r,s)-式 $\mathfrak{a}$ 称为 $\mathfrak{M}$ 中的调和式,若适合方程

$$\Delta\mathfrak{a} = 0.$$

如果 $\mathfrak{a}$ 有紧支集,或者 $\mathfrak{M}$ 为紧的时,

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \\ &= 2(\partial\partial^*\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 2(\partial^*\partial\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \\ &= 2(\partial^*\mathfrak{a}, \partial^*\mathfrak{a}) + 2(\partial\mathfrak{a}, \partial\mathfrak{a}), \end{aligned}$$

必须

$$\bar{\partial}\mathfrak{a} = 0, \ \bar{\partial}^*\mathfrak{a} = 0.$$

同理可证

$$\bar{\partial}\mathfrak{a} = 0, \quad \bar{\partial}^*\mathfrak{a} = 0.$$

定理4.1 当 $\mathfrak{M}$ 是紧 Kähler 流形，或者 $\mathfrak{a}$ 有紧支集，则

$$\Delta\mathfrak{a} = 0$$

与

$$\partial\mathfrak{a} = 0, \quad \bar{\partial}\mathfrak{a} = 0, \quad \partial^*\mathfrak{a} = 0, \quad \bar{\partial}^*\mathfrak{a} = 0$$

是等价的.

参 考 文 献

[1] Ahlfors L V. Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory. New York: McGraw-Hill, 1973

[2] Aubin T. Non-linear Analysis on Manifolds. Springer-Verlag, 1982

[3] Behnke H u, Thullen T. Theorie der Funktionen mehrerer Komplexexes Veränderlichen. Berlin, 1934

[4] Bergman S. Über die Existenz von Repräsentenbereichen in Theorie der Abildung durch Paare von Funktionen. Math. Ann., 1929, **102**: 430～446

[5] Boas H. Counterexample to the Lu Qi-keng Conjecture. Proc. Amer. Math. Soc. 1986, **97**: 36～37

[6] Bochner S. Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. Ann. of Mathematics, 1953, **44**(2): 652～673

[7] Cartan H. Sur les Groupes de Transformation analytique. Actualité, Sci. Ind., Expose Math. Ⅸ, Paris, 1935

[8] Cartan É. Sur les domaines bornés homogènés de l'espaces de *n* variables complexes. Hamberg Univ. Math. Abhandl., 1931, **11**: 106～162

[9] Chern S S(陈省身). Characteristic classes of Hermitian manifolds. Ann. of Math. 1945, **47**: 279～290

[10] Chern S S(陈省身). Differential Manifolds, Univ. of Chicago Notes, 1959

[11] Chern S S(陈省身). The integral form of the first main theorem for complex analytic mapping in several complex variables, Ann. of Math. 1960, **71**: 536～551

[12] 陈德全，吉新华. 扩充空间的非齐次退缩椭圆方程－Green 函数及其应用，数学学报，1986，**29**: 85～93

[13] Diederlich K. Some recent development in the theory of the Bergman kernel function: A survey. Symposium in pure Math, Part I, AMS, 1975, 127～138

[14] de Rham G. Variété Differentiables, Univ. de Nancago. 1955

[15] Eisenhart L P. Riemannian Geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1949

[16] Fuks B A. Über geodätische Manifaltigkeit einer invariant Riemannschen Geometrie, Mat. Sb. 1937, **2**: 569～594

[17] Fuks B A. Theory of analytic functions of several complex variables, OGIZ, 1948

[18] Gantmacher F F 著；柯召译. 矩阵论. 高等教育出版社，1953

[19] Gindikin S G. Analysis of homogeneous bounded domains, Y. M. H., 1964, **19**: 4～92

[20] Greene R B, Wu H(伍鸿熙). Function Theory on Manifolds which possess a Pole. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1979, Vol: 699

[21] Hahn K T. Inequality between the Bergman metric and Carathéodory differential metric, Proc. Amer. Math. Soc. 1978, **66**: 193～194

[22] 华罗庚. 多复变数里曼曲率的估值问题. 数学学报, 1954, **4**: 141～168

[23] 华罗庚. 一个偏微分方程组. 科学记录(新辑), 1957, **1**: 339～340

[24] 华罗庚. 多复变函数论中的典型域的调和分析. 科学出版社, 1958

[25] Hua L K(华罗庚), Look K H(陆启铿). Theory of harmonic functions in classical domains. Scientia Sinica, 1959, **8**: 1031～1094

[26] Henkin G M. Integral Representation of function in strongly pseudoconvex domain and application to $\bar{\partial}$-equation. Mat. Sb. 1970, **82**: 300～308

[27] Henkin G M. The method of integral representations in complex analysis. Encyclopaedia of Math. Science Vol 7, Several complex Variables I, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1990. 18～116

[28] Henkin G M, Leiterer J. Theory of Functions on Complex Manifolds. Berlin: Akademie-Verlag, 1984

[29] Hodge W V. Differential forms on a Kähler manifolds. Proc. Cambr. Ph. Soc, 1957, **47**: 504～517

[30] Kobayashi S, Nomizu K. Foundation of Differential Geometry. Vol. I - II, John & Son, 1963

[31] Kohn J J. Harmonic integral on strongly pseudoconvex manifold II, Ann. of Math., 1964, **79**: 450～472

[32] Kohn J J, Nirenberg J. A pseudoconvex domain not admitting a holomorphic supporting function, Math. Ann. 1973, **201**: 365～268

[33] Koranyi A. The Poisson integral for generalized half-plane and bounded symmetric domains, Ann. of Math. 1965, **82**: 332～350

[34] Leray J. La differential and integral calcul sur une variétés complex, Bull. Soc. Math. France, 1955, **87**: 81～180

[35] 陆启铿. 多复变函数与酉几何. 数学进展, 1956, **2**: 587～662

[36] Lu Qikeng. Schwarz lemma and analytic invariants. Scientia Sinica, 1958, **7**: 453～504

[37] 陆启铿. 多复变函数引论. 科学出版社, 1961

[38] 陆启铿. 典型流形与典型域. 上海科学技术出版社, 1963

[39] 陆启铿. 关于 Cauchy-Fantappiè 公式. 数学学报, 1966, **16**: 344～363; English translation, Chinese Mathematics, 1966

[40] 陆启铿. 规范场与主纤维丛上的联络. 物理学报, 1974, **23**: 249～263.

[41] Lu Qikeng. The estimation of the intrinsic derivatives of the analytic mapping of bounded domains. Scientia Sinica, Sepecial series Ⅱ. 1979. 1～17

[42] 陆启铿. 微分几何学及其在物理学中的应用. 科学出版社，1982

[43] Lu Qikeng. On the Schwarz lemma of higher order. Proc. Beijing Symposium on Diff. Geometry and Diff. Equations, 1980, Vol. Ⅲ: 1308～1318; Science Press 与 Gordan & Breac, 1982

[44] Lu Qikeng. On the representative domain. Proceedings Hangzhou Conference, 1981, 199～210; Birkhäuser, 1984

[45] Lu Qikeng. The Green forms and Cauchy formulae of a Kähler manifold. Chinese Quart. J. Math., 1987, 2: 1～12.

[46] 陆启铿. 超球不变度量的 Green 式. 中国科学 A 辑，1988，**11**: 1129～1140

[47] Lu Qikeng. The heat kernel of a ball in C^n. Chinese Ann. Math., 1990, **11**B: **1**: 1～14

[48] Lu Qikeng. The heat kernel of symmetric symmetric spaces. Proc. Symposium in Pure Math., 1993, **54**, Part Ⅱ: 401～409

[49] Lu Qikeng. On the Cauchy-Fantappiè formula and the solution of $\bar{\partial}$-equation. Differential Geometry, Proc. Symposium in Honor of Prof. SU Buchin on his 90th Birthday, Singapore: World Scientific, 1993, 137～149

[50] Lu Qikeng. A matrix formulation of complex flag manifold, Five Decades As A Mathematician And Educator, on the 80th birthday of Prof Wong Yung-chow, 259～278, ed. by Chan K Y and Liu M C. Singapor: World Scientific, 1995

[51] Lu Qikeng. The horo-hypercircle coordinates and their application to the construction of a heat kernel Chinese Sci Bulletin, 1995, **40**: 92～95

[52] Lu Qikeng, Hong Yi (洪毅). The heat kernel of the classical domain $\mathscr{R}_{I}(m,n)$. Proc. Mittag-Leffler Institute, Chap. 25, Princeton Univ Press, 1993. 483～506

[53] 陆启铿，许以超. 关于可递域的一个注记. 数学学报，1963，**13**: 49～62

[54] 陆汝钤. 一类非对称可递域的调和函数. 数学学报，1965，**15**: 615～650

[55] 刘伟明. 第Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ类扩充空间的共轭点。中国科技大学数学系——中科院数学所硕士论文，1990

[56] Martinelli M E. Sur l'extension des theoremes de Cauchy aux fonction de plusieurs variables complexes. Colloque sur les fonctions de plusieur variables, 1953, 109～124

[57] Milnor J. Morse Theory. Princeton Univ Press, 1963

[58] Matsura M S. On the Lu Qikeng conjecture and the Bergman representative domains, Pacific J. Math., 1973, **49**: 407～416

[59] Norquet F. Problem sur les form set les courant. Annales de l'institute Fourier,

1961, **11**: 1～82

[60] Pjatetski-Shapiro I. The Geometry of Classical Domains and Theory of Automorphic Functions. Fitzmatgiz, Moskow, 1961

[61] Reiffen H J. Die Carathéodory Distanz und ihre Zugehörige differential Metrik. Math. Ann., 1965, **161**: 315～324

[62] Rosenthal P L. On zeroes of the Bergman function in doubly connected domains. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **21**: 33～35

[63] Rund, H. The Differential Geometry of Finsler Spaces. 1959

[64] Skwarzcynski M. The invariant distance in the theory of pseudoconformal mapping and the Lu Qikeng conjecture. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, **22**: 305～310

[65] Sobolev 著，吴新谋译. 数学物理方程. 高等教育出版社，1954

[66] Takahashi R. Fonctions sphériques zonales sur $U(n, n+K; \mathbf{R})$. Seminar d'analyse, 1976－1977; Faculté des Science de Tunis, 1977

[67] Vinberg E B, Gindikin S G, Pjatetski-Shapiro I. Classification and cannonical realization of complex bounded homogeneous domains. Trans. Moscow Math. Soc., 1963, 404～437

[68] 王大明. 典型域的 Carathéodory 度量. 北京大学数学系毕业论文，1962

[69] Wong Yungchow(黄用诹). Sectional Curvature of Grassmann Manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1968, **60**: 75～79

[70] Wong Yungchow(黄用诹). Euclidean n-planes in pseudo-Euclidean spaces and differential geometry of Cartan domains. Bull. Amer. Math. Soc., 1969, **75**: 409～414

[71] 伍鸿熙、沈纯理、虞言林. 黎曼几何初步. 北京大学数学丛书，北京大学出版社，1989

[72] 伍鸿熙、陈维桓. 黎曼几何选讲. 北京大学数学丛书，北京大学出版社，1993

[73] Xu Yichao(许以超). On the Bergman kernel function of homogeneous bounded domains. Scientia Sinica, 1979, **2**, 80～90

[74] Xu Yichao(许以超). Some results on the classification of homogeneous bounded domains. Beijing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Equations. 1980, Vol. Ⅲ: 1621～1638; Science Press 与 Gordan & Breac, 1982

[75] 许以超. 关于 N-Siegel 域上二阶不变微分算子. 数学学报，1982, **22**: 340～353

[76] Xu Yichao(许以超), Wu Lanfang(吴兰芳). Holomorphic sectional curvatures of homogeneous bounded domains. Kexue Tongbao, 1988, **28**: 392～596

[77] 姚加贤。I 型对称空间的 Morse 函数，中国科技大学数学系——中科院数学所硕士论文，1990

[78] Yau S T. (丘成桐) Calabi conjecture and some new results in algebraic geome-

try. Proc. Nat. Acad. Sci USA, 1977, **74**: 1798～1799

[79] Yin Weiping (殷慰萍). Two problems on Cartan domains. 中国科学技术大学学报, 1986, **16**: 130～146

[80] Yin Weiping (殷慰萍). A comparison theorem of the Kobayashi metric on a class of Reinhardt domains, Proc. of the AMC'90

[81] 钟家庆. 有界可递域不变微分算子的维数. 数学年刊, 1980, **1**: 261～272

[82] 钟家庆. 典型域扩充空间的上同调. 数学学报, 1981, **24**: 931～949

索　　引

这里只是《典型流形与典型域》一书中未曾出现的名词索引和记号索引.

I. 名 词 索 引

Ⅱ. 符号索引

[General Information]
书名=典型流形与典型域（新篇）
作者=陆启铿
页数=369
SS号=10236416
DX号=
出版日期=1997年05月第1版
出版社=上海科学技术出版社